

α) Παρατηρούμε ότι :

$$F'(x) = \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x-1)' \cdot (x+1)}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} \Rightarrow F'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, άρα η F είναι μία αρχική της f .

β) $\int_2^3 \frac{-2}{(x-1)^2} dx = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 F'(x) dx = [F(x)]_2^3 = \left[\frac{x+1}{x-1} \right]_2^3 = \frac{4}{2} - 3 = -1$

γ) Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $x_0 = 1$ (σημείο ασυνέχειας της F).

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$ γιατί :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \quad \text{και} \quad x-1 < 0 \quad \text{για} \quad x < 1$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$

Άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $-\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-x} = 0 = \lambda$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $+\infty$

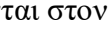
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lambda$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

δ) $F'(x) = f(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

Τα πρόσημα της F' , και η μονοτονία της F φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$F'(x)$	-		-
$F(x)$			

Οπότε, η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1)$ η F είναι γνησίως φθίνουσα , άρα :

$$F(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \right) = (-\infty, 1)$$

Στο διάστημα $A_2 = (1, +\infty)$ η F είναι γνησίως φθίνουσα , άρα

$$F(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) \right) = (1, +\infty)$$

Το σύνολο τιμών της F είναι το $F(A_1) \cup F(A_2) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$