ΘΕΜΑ 36.154

α) $f(x)+e^{f(x)}=x+1 \overset{\text{παραγωγιζουμε}}{\Rightarrow} f'(x)+f'(x)e^{f(x)}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)\left(1+e^{f(x)}\right)=1 \overset{1+e^{f(x)}\neq 0}{\Rightarrow} f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}} \overset{1+e^{f(x)}>0}{\Rightarrow} f'(x)>0$, για κάθε

$x\in R$

<u>Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R</u>

β) Επειδή $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}$ η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις , παραγωγίσιμων , άρα η f είναι <u>δύο φορές παραγωγίσιμη</u> με

$f''(x)=-\dfrac{f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} \overset{f'(x)>0}{\Rightarrow} f''(x)<0$, για κάθε $x\in R$

<u>Άρα η f είναι κοίλη στο R</u>

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x)=x+e^x-1$

Παρατηρούμε ότι $h(0)=0$

Ακόμη η h είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=1+e^x>0$, οπότε η h είναι <u>γνησίως αύξουσα και άρα 1−1</u>

Ακόμη

$f(x)+e^{f(x)}=x+1 \overset{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f(0)+e^{f(0)}=0+1 \Rightarrow f(0)+e^{f(0)}-1=0 \overset{h(x)=x+e^x-1}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow h(f(0))=0 \overset{h(0)=0}{\Rightarrow} h(f(0))=h(0) \overset{h:1-1}{\Rightarrow} f(0)=0$

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=xf'(x)-f(x)$, $x\in[0,+\infty)$

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R , η g θα είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$, και για κάθε $x>0$, θα είναι

$g'(x)=f'(x)-xf''(x)-f'(x) \Rightarrow g'(x)=-xf''(x) \overset{x<0\,,\, f''(x)<0}{\Rightarrow} g'(x)<0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$

Επομένως για κάθε $x\geq 0$ θα είναι

$x\geq 0 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x)\leq g(0) \overset{g(x)=xf'(x)-f(x)\,,\, f(0)=0}{\Rightarrow} xf'(x)-f(x)\leq 0$

ε) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} y=f'(0)x \quad (1)$$

Όμως $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}} \overset{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f'(0)=\dfrac{1}{1+e^{f(0)}} \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} f'(0)=\dfrac{1}{2} \quad (2)$

Άρα $(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} y=\dfrac{1}{2}x$

στ) Επειδή η f είναι <u>κοίλη</u> στο R , <u>θα είναι μικρότερη από κάθε εφαπτόμενη της</u> , άρα και από την εφαπτόμενη της στο $A(0,f(0))$

που σύμφωνα με το ερώτημα ε) έχει εξίσωση $y=\dfrac{1}{2}x$

Άρα $f(x)\le \dfrac{x}{2}$ για κάθε $x\in R$

Ακόμη

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\le \dfrac{x}{2}\text{ , για κάθε } x\in R \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

ζ) i) Έχουμε

$$f(x)+e^{f(x)}=x+1 \overset{\text{θέτουμε } x=x_o}{\Rightarrow} f(x_o)+e^{f(x_o)}=x_o+1 \overset{f(x_o)=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 1+e=x_o+1 \Rightarrow x_o=e \quad \text{δηλαδή } f(e)=1$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση H με

$$H(x)=f(x)-\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \text{ , } x\in(-1,+\infty)$$

Η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,+\infty)$ με

$$H'(x)=f'(x)-\frac{1}{\frac{1+x}{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} \overset{f'(x)=\frac{1}{1+e^{f(x)}}}{=} \frac{1}{1+e^{f(x)}}-\frac{1}{1+x}=\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}-e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)(1+x)}$$

Άρα $H'(x)=\dfrac{x-e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)(1+x)}$

Για να βρούμε το πρόσημο της $H'(x)$, θεωρούμε την συνάρτηση

$$G(x)=x-e^{f(x)} \text{ , } x\in(-1,+\infty)$$

Παρατηρούμε ότι $G(e)=e-e^{f(e)} \overset{f(e)=1}{\Rightarrow} G(e)=0 \quad (3)$

Ακόμη

Η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,+\infty)$ με

$$G'(x)=1-f'(x)e^{f(x)} \overset{f'(x)=\frac{1}{1+e^{f(x)}}}{=} 1-\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}=\frac{1+\cancel{e^{f(x)}}-\cancel{e^{f(x)}}}{1+e^{f(x)}}=\frac{1}{1+e^{f(x)}}>0$$

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$. Επομένως

για κάθε $x<e \overset{G\nearrow}{\Rightarrow} G(x)<G(e) \overset{(3)}{\Rightarrow} x-e^x<0$

για κάθε $x>e \overset{G\nearrow}{\Rightarrow} G(x)>G(e) \overset{(3)}{\Rightarrow} x-e^x>0$

Έτσι τα πρόσημα της H', η μονοτονία και τα ακρότατα της H φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		e		$+\infty$
$H'(x)$				−	0	+	
$H(x)$				↘	min	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι η H παρουσιάζει στο $x_o=e$, ολικό ελάχιστο

Άρα για κάθε $x>-1$ είναι

$$H(x)\ge H(e)\Rightarrow f(x)-\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\ge f(e)-\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\overset{f(e)=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x)-\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\ge 1-\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\overset{1-\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)>0\Leftrightarrow \ln e>\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)>0\Leftrightarrow e>\frac{e+1}{2}\Leftrightarrow 2e>e+1\Leftrightarrow e>1 \text{ που ισχύει}}{>}$$

Άρα για κάθε $x>-1$ είναι

$$f(x)-\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)>0\Rightarrow f(x)>\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Ακόμη

$$\left.\begin{array}{l} f(x)>\ln\left(\frac{x+1}{2}\right), \text{ για κάθε } x>-1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\overset{y=\frac{x+1}{2}}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

η) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R το σύνολο τιμών της θα είναι το

$$f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)\overset{\text{ερωτήματα στ), ζ)ii)}}{=}(-\infty,+\infty)=R$$

θ) Η πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x\to-\infty$ είναι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$,

όπου

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{\text{μορφή }\frac{-\infty}{-\infty}\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{(x)'}\overset{f'(x)=\frac{1}{1+e^{f(x)}}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{f(x)}}\overset{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{f(x)}=0}{=}\boxed{1}$$

και

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] \overset{\lambda=1}{=} \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right] \overset{f(x)+e^{f(x)}=x+1\Rightarrow f(x)-x=1-e^{f(x)}}{=}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[1-e^{f(x)}\right] \overset{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{f(x)}=0}{=} \boxed{1}$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x\to-\infty$ είναι η ευθεία $y=x+1$

ι) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα <u>1–1</u> , άρα <u>αντιστρέψιμη</u>. Το <u>πεδίο ορισμού</u> της f^{-1} είναι το <u>σύνολο τιμών της f</u> δηλαδή το <u>R</u>

Ακόμη

$$f(x)+e^{f(x)}=x+1 \overset{\text{θέτουμε όπου x το } f^{-1}(x)}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right)+e^{f\left(f^{-1}(x)\right)}=f^{-1}(x)+1 \overset{f\left(f^{-1}(x)\right)=x}{\Rightarrow}$$

$$x+e^{x}=f^{-1}(x)+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=e^{x}+x-1 \quad , \quad x\in R$$

ια) Εφαρμόζουμε το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> για την συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x+\alpha, x+\beta\right]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $\left[x+\alpha, x+\beta\right]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x+\alpha, x+\beta\right)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του <u>θεωρήματος μέσης τιμής</u> οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(x+\alpha, x+\beta\right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+\beta)-f(x+\alpha)}{(x+\beta)-(x+\alpha)} \Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(x+\beta)-f(x+\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+\beta)-f(x+\alpha)=(\beta-\alpha)f'(\xi) \overset{f'(x)=\frac{1}{1+e^{f(x)}}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x+\beta)-f(x+\alpha)=\frac{\beta-\alpha}{1+e^{f(\xi)}} \quad (4)$$

Οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x+\beta)-f(x+\alpha)\right] \overset{(4)}{=} \lim_{\xi\to-\infty}\frac{\beta-\alpha}{1+e^{f(\xi)}} \overset{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}{=} \frac{\beta-\alpha}{1+0}=\beta-\alpha$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x+\beta)-f(x+\alpha)\right] \overset{(4)}{=} \lim_{\xi\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{1+e^{f(\xi)}} \overset{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}{=} \frac{\beta-\alpha}{1+\infty}=0$$

ιβ) $\displaystyle\int_0^e f(x)\,dx \overset{\substack{y=f(x)\Rightarrow\begin{cases}1\text{η λύση: } x=f^{-1}(y)\Rightarrow x=e^{y}+y-1\Rightarrow dx=\left(e^{y}+1\right)dy\\ 2\text{η λύση: } dy=f'(x)dx\Rightarrow dy=\frac{1}{1+e^{f(x)}}dx\Rightarrow dy=\frac{1}{1+e^{y}}dx\Rightarrow dx=\left(1+e^{y}\right)dy\end{cases}\\ \text{για } x=0\Rightarrow y=f(0)=0\\ \text{για } x=e\Rightarrow y=f(e)=1}}{=}$

$$=\int_0^1 y\left(1+e^{y}\right)dy=\int_0^1\left(y+ye^{y}\right)dy=\int_0^1 y\,dy+\int_0^1 ye^{y}\,dy$$

$$=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1+\int_0^1 y\left(e^y\right)' dy \overset{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[ye^y\right]_0^1-\int_0^1 e^y dy=\frac{1}{2}+e-\left[e^y\right]_0^1=\frac{1}{2}+e-(e-1)=\frac{3}{2}$$

ιγ) Η πλάγια ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ όταν $x\to-\infty$ είναι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$,

όπου

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}\overset{f^{-1}(x)=e^x+x-1}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}+1-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$

$$\overset{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot\frac{1}{x}=0\cdot0=0}{=}\boxed{1}$$

και

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f^{-1}(x)-\lambda x\right]\overset{\lambda=1\,,\,f^{-1}(x)=e^x+x-1}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+\cancel{x}-1-\cancel{x}\right)=0-1=-1$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ στο $-\infty$ είναι η ευθεία $y=x-1$

ιδ) 1. Η f^{-1} έχει <u>πεδίο ορισμού το R</u>

2. Η f^{-1} είναι <u>συνεχής στο R</u> ως άθροισμα συνεχών

3. Έχουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=e^x+1$$

Επειδή $\left(f^{-1}\right)'(x)>0$ η f^{-1} είναι <u>γνησίως αύξουσα στο R</u>

Έχουμε επίσης

$$\left(f^{-1}\right)''(x)=e^x$$

Επειδή $\left(f^{-1}\right)''(x)>0$ η f^{-1} είναι <u>κυρτή στο R</u>

4. Η f^{-1} δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη επειδή είναι συνεχής στο R

Είδαμε στο ιγ) ερώτημα ότι η ευθεία $y=x-1$ είναι <u>πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$</u>

Ακόμη

$$\lim_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x-1\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x-1}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\text{μορφή }\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{1}=+\infty$$

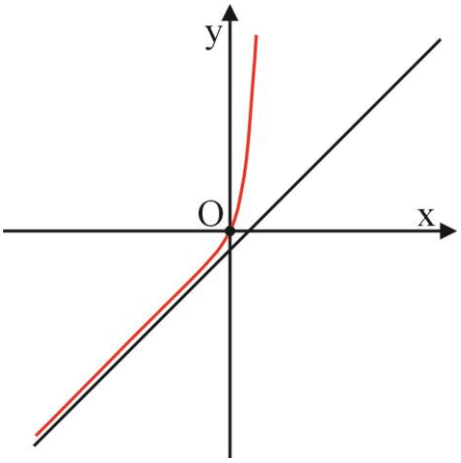
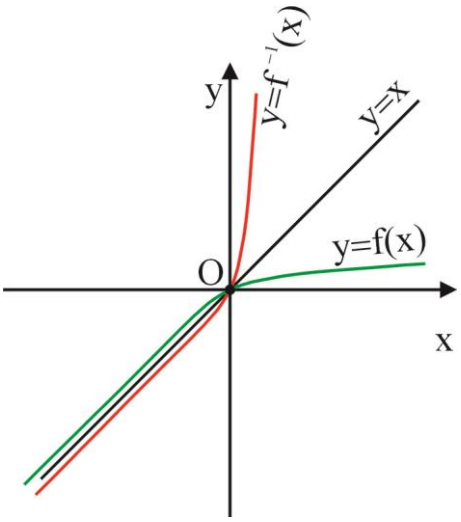
Άρα η f^{-1} δεν έχει άλλη ασύμπτωτη

Επίσης έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+x-1\right)=-\infty$$

5. Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f^{-1} και χαράσσουμε την γραφική παράσταση της f^{-1} (η οποία θα περνά σίγουρα από το $(0,0)$)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f''(x)$		−	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$



ιε) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική , της γραφικής παράστασης της f^{-1} , ως προς την ευθεία y=x , και άρα η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω