

α) Αφού το x_0 είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, θα είναι $f(x_0) = 0$ (1)

Επειδή $f(0) = 2$ θα είναι $f^{-1}(2) = 0$

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f(0) + f^{-1}(0) = 2 \cdot 0 \xrightarrow{f(0)=2} 2 + f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(0) = -2 \Rightarrow f(-2) = 0 \xrightarrow{(1)} f(-2) = f(x_0) \xrightarrow{f:1-1} x_0 = -2$$

β) Από το πρώτο ερώτημα ισχύει $f(-2) = 0$

Οπότε

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=-2} f(-2) + f^{-1}(-2) = 2 \cdot (-2) \xrightarrow{f(-2)=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-2) = -4 \Rightarrow f(-4) = -2$$

γ) Έχουμε ότι

$$f(0) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 0 \quad (2)$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = -2 \quad (3)$$

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x \Rightarrow \int_0^2 [f(x) + f^{-1}(x)] dx = \int_0^2 2x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f^{-1}(x) dx = [x^2]_0^2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f^{-1}(x) dx = 4 \quad (4)$$

Όμως

$$\int_0^2 f^{-1}(x) dx \xrightarrow[\substack{\text{για } x=0 \Rightarrow y=f^{-1}(0)=-2 \\ \text{για } x=2 \Rightarrow y=f^{-1}(2)=0}]{y=f^{-1}(x) \Rightarrow x=f(y) \Rightarrow dx=f'(y)dy} \int_{-2}^0 y f'(y) dy \xrightarrow{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}} =$$

$$= [y f(y)]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 f(y) dy = 2f(-2) - \int_{-2}^0 f(x) dx \xrightarrow{f(-2)=0} = - \int_{-2}^0 f(x) dx$$

$$\text{Άρα } \int_0^2 f^{-1}(x) dx = - \int_{-2}^0 f(x) dx \quad (5)$$

$$\text{Οπότε } (4) \xrightarrow{(5)} \int_0^2 f(x) dx - \int_{-2}^0 f(x) dx = 4 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 4 + \int_{-2}^0 f(x) dx$$

$$\delta) f(x) + f^{-1}(x) = 2x \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} f(f(x)) + f^{-1}(f(x)) = 2f(x) \xrightarrow{f^{-1}(f(x))=x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f(x)) + x = 2f(x) \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(f(x))f'(x) + 1 = 2f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)[f'(f(x)) - 2] = -1 \quad (6)$$

Από την σχέση (6) παρατηρούμε ότι η $f'(x)$ δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$,

(διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_1) = 0$, τότε

$$(6) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=x_1} f'(x_1)[f'(f(x_1)) - 2] = -1 \xRightarrow{f'(x_1)=0} 0 = 1 \text{ \underline{άτοπο}})$$

και επειδή η $f'(x)$ είναι συνεχής (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) συμπεραίνουμε ότι, η $f'(x)$, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο

Άρα είναι

ή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν όμως ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f θα ήταν γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε αφού $\dots$, άτοπο

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\text{για κάθε } x \geq 0 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) \geq f(0) \xRightarrow{f(0)=2} f(x) \geq 2 \quad (7)$$

Ακόμη

θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - 2x - 2$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f'(x) - 2$ (8)

Όμως από την σχέση (6) προκύπτει ότι

$$f'(x)[f'(f(x)) - 2] = -1 \xRightarrow{f'(x)>0} f'(f(x)) - 2 < 0 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(f(f^{-1}(x))) < 2 \xRightarrow{f(f^{-1}(x))=x} f'(x) < 2 \quad (9)$$

Άρα $(8) \xRightarrow{(9)} h'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$\text{για κάθε } x \geq 0 \xRightarrow{h \searrow} h(x) \leq h(0) \Rightarrow f(x) - 2x - 2 \leq f(0) - 2 \cdot 0 - 2 \xRightarrow{f(0)=2} \Rightarrow f(x) - 2x - 2 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 2x + 2 \quad (10)$$

Από (7) και (10) έχουμε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $2 \leq f(x) \leq 2x + 2$

στ) Από το ερώτημα ε) έχουμε ότι για κάθε $x \in [0, 2]$ ισχύει

$$f(x) \leq 2x + 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 (2x + 2) dx \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx \leq [x^2 + 2x]_0^2$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx \leq 8 \xRightarrow{\gamma) \text{ ερώτημα}} 4 + \int_{-2}^0 f(x) dx \leq 8 \Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx \leq 4 \quad (11)$$

Επίσης πάλι από το ερώτημα ε) έχουμε ότι για κάθε $x \in [0, 2]$ ισχύει

$f(x) - 2 \geq 0$ χωρίς η $f(x) - 2$ να είναι παντού μηδέν, άρα

$$\int_0^2 [f(x) - 2] dx > 0 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 2 dx > 0 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx > \int_0^2 2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx > 2(2 - 0) \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx > 4 \xrightarrow{\gamma) \text{ ερώτημα}} 4 + \int_{-2}^0 f(x) dx > 4$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx > 0 \quad (12)$$

$$\text{Από (7) και (10) έχουμε } 0 < \int_{-2}^0 f(x) dx \leq 4$$

ζ) Έστω ότι υπάρχει $\xi \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$. Τότε

$$\xi > -2 \xRightarrow{f \nearrow} f(\xi) > f(-2) \xRightarrow{f(\xi)=\xi, f(-2)=0} \xi > 0 \text{ \underline{άτοπο} διότι } \xi \in (-2, 0)$$

άρα $\xi \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$

η) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-4, -2]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[-4, -2]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-4, -2)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-4, -2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} \xRightarrow{f(-4)=-2, f(-2)=0} f'(\xi_1) = \frac{0+2}{2} \Rightarrow f'(\xi_1) = 1 \quad (13)$$

Ομοίως

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-2, 0]$ Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 0)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (-2, 0)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} \xRightarrow{f(-2)=0, f(0)=2} f'(\xi_2) = \frac{2-0}{2} \Rightarrow f'(\xi_2) = 1 \quad (14)$$

Προφανώς $\xi_1, \xi_2 \in (-4, 0)$ και άρα από τις σχέσεις (13) και (14) προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-4, 0)$

θ) Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$

η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$

η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1, ξ_2)

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ,
οπότε η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) άρα
και στο διάστημα $(-4, 0)$