

α) Στη σχέση $f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}}$ θέτουμε $x=0$ και έχουμε

$$f'(0) = \frac{2}{1+e^{f(0)}} \xRightarrow{f'(0)=1} 1 = \frac{2}{1+e^{f(0)}} \Rightarrow 1+e^{f(0)} = 2 \Rightarrow e^{f(0)} = 1 \Rightarrow e^{f(0)} = e^0 \Rightarrow \boxed{f(0)=0}$$

Ακόμη προφανώς είναι $1+e^{f(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{1+e^{f(x)}} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η μοναδική ρίζα της f είναι η $x_0 = 0$

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

$$f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}} \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = -\frac{2e^{f(x)}f'(x)}{[1+e^{f(x)}]^2} \xRightarrow{\substack{f'(x)>0 \\ e^{f(x)}>0}} f''(x) < 0 \text{ και άρα η } f \text{ είναι}$$

κοίλη

γ) Έστω ότι υπάρχουν τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ της γραφικής παράστασης της f με $x_1 < x_2 < x_3$ τα οποία είναι συνευθειακά.

$$\text{Αυτό σημαίνει ότι } \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Rightarrow \boxed{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}} \quad (1)$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad (2)$$

Επίσης

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x_2, x_3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_2, x_3)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \quad (3)$$

Τέλος

Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1, ξ_2)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_3)}{x_3 - x_3} \Rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε

$f''(\xi) = 0$ **άτοπο** διότι είδαμε ότι $f''(x) < 0$ και επομένως δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία στην γραφική παράσταση της f

δ) Η εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο της $(0, f(0))$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

Επειδή η f είναι κοίλη θα είναι κάτω από την εφαπτομένη της άρα $\boxed{f(x) \leq x}$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$)

ε) Θέτουμε $h(x) = f(x) + e^{f(x)}$ και $g(x) = 2x + 1$. Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} h'(x) &= f'(x) + e^{f(x)} f'(x) = f'(x)(1 + e^{f(x)}) \\ &= \frac{f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}}}{1+e^{f(x)}} (1+e^{f(x)}) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g'(x) = 2$$

$$\Rightarrow h'(x) = g'(x) \Rightarrow h(x) = g(x) + c \Rightarrow \boxed{f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1 + c} \quad \text{θέτουμε } x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) + e^{f(0)} = 2 \cdot 0 + 1 + c \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\text{Άρα τελικά } \boxed{f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1}$$

στ) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 1 - e^{f(x)} \Rightarrow \boxed{f(x) < 2x + 1} \quad -e^{f(x)} < 0$$

ζ) Από το ερώτημα ε) έχουμε

$$f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1 \Rightarrow e^{f(x)} = 2x + 1 - f(x) \Rightarrow e^{f(x)} = x + 1 + x - f(x) \quad \text{ερώτημα δ) } \Rightarrow x - f(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} \geq x + 1 \Rightarrow \boxed{f(x) \geq \ln(x + 1)}$$

η) Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty} \quad f(x) < 2x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \quad f(x) > \ln(x + 1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \Rightarrow \boxed{f(A) = (-\infty, +\infty)}$

θ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (διότι είναι παραγωγίσιμη) δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Ακόμη επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ η f δεν έχει ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες. Ψάχνουμε λοιπόν μόνο για πλάγιες ασύμπτωτες

Αρχικά ψάχνουμε για πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

$$\text{Έχουμε ότι } f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 1 - e^{f(x)} \quad (1)$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1 - e^{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{e^{f(x)}}{x} \right)}{\cancel{x}} =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)} = 0 \\ &= 2 + 0 - 0 = \boxed{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ακόμη } f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1 \Rightarrow f(x) - 2x = +1 - e^{f(x)} \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - e^{f(x)}] \stackrel{\substack{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)} = 0}}{=} 1 - 0 = \boxed{1}$$

Άρα η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

Ψάχνουμε τώρα για πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\substack{+\infty \\ +\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + e^{f(x)}} \stackrel{\substack{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = +\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

- ι) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και αντιστρέψιμη. Στην σχέση $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$ θέτουμε όπου x την $f^{-1}(x)$ και έχουμε

$$f(f^{-1}(x)) + e^{f(f^{-1}(x))} = 2 \cdot f^{-1}(x) + 1 \stackrel{f(f^{-1}(x))=x}{\Rightarrow} 2f^{-1}(x) + 1 = x + e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x + e^x - 1}{2}} \quad (1)$$

Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ άρα η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε

$$f^{-1}(1) = \frac{1 + e^1 - 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{e}{2} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{e}{2}\right) = 1}$$

$$\begin{aligned} \text{ια)} \quad \int_0^{\frac{e}{2}} f(x) dx &\stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y) \\ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = \frac{y+e^y-1}{2} \Rightarrow dx = \frac{1+e^y}{2} dy}}{=} \int_0^1 y \frac{1+e^y}{2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y dy + \frac{1}{2} \int_0^1 y e^y dy = \\ &\stackrel{\substack{\text{για } x=0 \Rightarrow y=f(0)=0 \\ \text{για } x=\frac{e}{2} \Rightarrow y=f\left(\frac{e}{2}\right)=1}}{=} \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 y (e^y)' dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + \frac{1}{2} [y e^y]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (y)' e^y dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(1e^1 - 0 \cdot e^0 \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^y dy = \frac{1}{4} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \left[e^y \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \left(e^1 - e^0 \right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} (e - 1) = \frac{1}{4} + \cancel{\frac{e}{2}} - \cancel{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$