ΘΕΜΑ 36.151

α) Επειδή $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$, συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,2]$

Άρα για κάθε $x\in(1,2)$ έχουμε

$$x<2 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(2) \overset{f'(2)=1}{\Rightarrow} f'(x)>1 \Rightarrow f'(x)>0$$

Άρα η f είναι <u>γνησίως αύξουσα</u> στο πεδίο ορισμού της , δηλαδή στο διάστημα $[1,2]$

και αφού η f είναι συνεχής το σύνολο τιμών της είναι το
$f(A)=[f(1)\,,\,f(2)]=[0\,,\,2]$

β) Η εφαπτόμενη της C_f , στο σημείο της $(2,f(2))$ είναι

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \overset{f(2)=2,\,f'(2)=1}{\Rightarrow} y-2=1\cdot(x-2)\Rightarrow y-2=x-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=x$$

Άρα η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f και μάλιστα στο σημείο της $(2,f(2))$

γ) Η συνάρτηση f , είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ οπότε σύμφωνα με το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1} \overset{f(2)=2,\,f(1)=0}{\Rightarrow} f'(\xi)=2$$

Ακόμη

Η συνάρτηση f' , είναι συνεχής στο $[\xi,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi,2)$ οπότε σύμφωνα με το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> υπάρχει $x_o\in(\xi,2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(x_o)=\frac{f'(2)-f'(\xi)}{2-\xi} \overset{f'(2)=1,\,f'(\xi)=2}{\Rightarrow} f''(x_o)=\frac{-1}{2-\xi}\Rightarrow$$

$$\frac{-1}{2-\xi}<-1 \overset{\xi\in(1,2)\Rightarrow 2-\xi>0}{\Leftrightarrow} -1<-(2-\xi)\Leftrightarrow -1<\xi-2\Rightarrow\xi>1 \text{ που ισχύει διότι } \xi\in(1,2)$$

$$\Rightarrow f''(x_o)<-1$$

δ) **i)** Για κάθε $x\in(1,2)$, η συνάρτηση f είναι

συνεχής στο $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$ οπότε σύμφωνα με το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> υπάρχει $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (1)

και

συνεχής στο $[x,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,2)$ οπότε σύμφωνα με το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> υπάρχει $\xi_2 \in (x,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$ (2)

Επειδή $\xi_1 \in (1,x)$ και $\xi_2 \in (x,2)$ θα είναι $\xi_1 < \xi_2$, οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} > \frac{f(2)-f(x)}{2-x}$$

ii) Η σχέση $f(x) \geq 2(x-1)$ ισχύει

για $x=1$ διότι $f(1) \geq 2(1-1) \Leftrightarrow 0 \geq 0$, που ισχύει

για $x=2$ διότι $f(2) \geq 2(2-1) \Leftrightarrow 2 \geq 2$, που ισχύει

για κάθε $x \in (1,2)$ διότι από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > \frac{f(2)-f(x)}{2-x} \overset{f(1)=0,f(2)=2}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x} \overset{1<x<2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x)(2-x) > [2-f(x)](x-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2f(x) - \cancel{xf(x)} > 2x-2-\cancel{xf(x)} + f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) > 2x-2 \Rightarrow f(x) > 2(x-1) \Rightarrow f(x) \geq 2(x-1)$$

Άρα η σχέση $f(x) \geq 2(x-1)$ ισχύει για κάθε $x \in [1,2]$

iii) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x \in [1,2]$

$$f(x) \geq 2(x-1) \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx \geq \int_1^2 (2x-2)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x)dx \geq [x^2-2x]_1^2 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx \geq (4-4)-(1-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x)dx \geq 1$$

ε) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x)-(-x+2) \Rightarrow h(x) = f(x)+x-2$

Για να αποδείξουμε ότι η ευθεία $x+y=2$ τέμνει σε ένα ακριβώς σημείο τη γραφική παράσταση της f , <u>αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h έχει ακριβώς μία ρίζα</u>

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, ως πράξεις συνεχών με

$$h(1) = f(1)+1-2 \overset{f(1)=0}{\Rightarrow} h(1) = -1 < 0$$
$$h(2) = f(2)+2-2 \overset{f(2)=2}{\Rightarrow} h(2) = 2 > 0$$

Επομένως σύμφωνα με το <u>θεώρημα Bolzano</u> η h έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R , με

$$h'(x)=f'(x)+1 \overset{f'(x)>0}{\Rightarrow} h'(x)>0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1–1 , οπότε η h έχει <u>το πολύ μία ρίζα στο R</u>

Τελικά η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο R (και μάλιστα στο διάστημα $[1,2]$)

στ) Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=f'(\xi_1)+2$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει $\xi\in(1,2)$, τέτοιο ώστε

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-2+\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)=2-\xi$$

Οπότε

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,\xi]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,\xi)$ και άρα σύμφωνα με το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> υπάρχει $\xi_1\in(1,\xi)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(1)}{\xi-1}\overset{f(\xi)=2-\xi,f(1)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)=\frac{2-\xi}{\xi-1}\ (3)$$

και

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi,2]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\xi,2)$ και άρα σύμφωνα με το <u>θεώρημα μέσης τιμής</u> υπάρχει $\xi_1\in(\xi,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(\xi)}{2-\xi}\overset{f(\xi)=2-\xi,f(2)=2}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)=\frac{\cancel{2}-\cancel{2}+\xi}{2-\xi}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{\xi}{2-\xi}\ (3)$$

Για τα παραπάνω ξ_1,ξ_2 ισχύει η σχέση $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=f'(\xi_1)+2$ διότι

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=f'(\xi_1)+2\overset{(3),(4)}{\Leftrightarrow}\frac{\cancel{2-\xi}}{\xi-1}\cdot\frac{\xi}{\cancel{2-\xi}}=\frac{2-\xi}{\xi-1}+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\xi}{\xi-1}=\frac{2-\xi}{\xi-1}+2\Leftrightarrow\xi=\cancel{2}-\xi+2\xi-\cancel{2}\ \text{ που ισχύει}$$

Άρα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=f'(\xi_1)+2$

ζ) Η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη , $f(1)=0$, $f(2)=2$ και στο σημείο της $(2,f(2))$, έχει εφαπτόμενη την ευθεία $y=x$. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα