ΘΕΜΑ 36.150

α) Έχουμε

$$e^{f(x)}+e^{f'(x)}=2\Rightarrow e^{f'(x)}=2-e^{f(x)}\Rightarrow f'(x)=\ln\left[2-e^{f(x)}\right]\ (1)$$

Οπότε

$$\left.\begin{array}{l}\text{η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη}\\ \text{η } e^{x} \text{ είναι παραγωγίσιμη}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{η } e^{f(x)} \text{ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση}$$

παραγωγίσιμων $\Rightarrow$ η $2-e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά

παραγωγίσιμων $\Rightarrow$ η $f'(x)=\ln\left[2-e^{f(x)}\right]$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων

Άρα <u>η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη</u>

β) i) Αν $f(x)>0$ και $f'(x)>0$ τότε

$$\left.\begin{array}{l}e^{f(x)}>1\\ e^{f'(x)}>1\end{array}\right\}\overset{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}{\Rightarrow} e^{f(x)}+e^{f'(x)}>2 \text{ άτοπο διότι } e^{f(x)}+e^{f'(x)}=2$$

Αν $f(x)<0$ και $f'(x)<0$ τότε

$$\left.\begin{array}{l}e^{f(x)}<1\\ e^{f'(x)}<1\end{array}\right\}\overset{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}{\Rightarrow} e^{f(x)}+e^{f'(x)}<2 \text{ άτοπο διότι } e^{f(x)}+e^{f'(x)}=2$$

Άρα οι $f(x)$ και $f'(x)$ <u>δεν είναι ομόσημοι</u>, δηλαδή <u>είναι ετερόσημοι ή κάποιος από τους δύο είναι μηδέν</u>

Άρα θα ισχύει $f(x)f'(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,1]$

ii) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$h'(x)=2f(x)f'(x)\overset{\beta)\text{i) ερώτημα}}{\Rightarrow} h'(x)\le 0 \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

Άρα η h είναι φθίνουσα στο $[0,1]$

iii) Έχουμε

$$1<2\overset{h\ \text{φθίνουσα}}{\Rightarrow} h(2)\le h(1)\Rightarrow f^2(2)\le f^2(1)\Rightarrow |f(1)|\le|f(0)|$$

γ) i) Έχουμε ισοδύναμα για κάθε $x\in[0,1]$

$$f(x)+f'(x)\le 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x)+\ln\left[2-e^{f(x)}\right]\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{f(x)}+\ln\left[2-e^{f(x)}\right]\le 0\Leftrightarrow \ln\left[e^{f(x)}\left(2-e^{f(x)}\right)\right]\le \ln 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{f(x)}-e^{2f(x)}\le 1\Leftrightarrow e^{2f(x)}-2e^{f(x)}+1\ge 0 \Leftrightarrow\left[e^{f(x)}-1\right]^2\ge 0$$ <u>που ισχύει</u>

άρα ισχύει και η σχέση $f(x)+f'(x)\le 0$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=e^x f(x)$, $x\in[0,1]$
Η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)\Rightarrow g'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]\overset{\gamma)\text{i})\text{ερώτημα}}{\le} 0$$

Άρα η g είναι φθίνουσα στο $[0,1]$ οπότε

$$1\ge 0 \overset{\text{g φθίνουσα}}{\Rightarrow} g(1)\le g(0)\Rightarrow e^1 f(1)\le e^0 f(0)\Rightarrow ef(1)\le f(0)$$

iii) Από το ερώτημα γ)i) έχουμε

$$f(x)+f'(x)\le 0\Rightarrow \int_0^1\left[f(x)+f'(x)\right]dx\le 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f'(x)dx\le 0\Rightarrow\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx+\left[f(x)\right]_0^1\le 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx+f(1)-f(0)\le 0\Rightarrow f(1)-f(0)\le -\int_0^1 f(x)dx \quad (2)$$

Ακόμη

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\overset{(2)}{\Rightarrow} f'(\xi)\le -\int_0^1 f(x)dx$$