

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.15

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

$$\text{με } f(-1) = 0 \text{ και } f(1) = 1$$

Τα πρόσημα της f' , η
μονοτονία και τα ακρότατα
της f φαίνονται στον
διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f(x)					

Οπότε, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Στο $x_0 = -1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0

Στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το 1

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 4x(x^2 + 1)(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^4 + 2x^2 + 1) - (4x^3 + 4x)(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{-2x^5 - 4x^3 - 2x - 4x^3 + 4x^5 - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x^5 - 4x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 6)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{2x(x^2 + 1)(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

Επομένως

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{3}$$

$$\text{με } f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3} + 2}{4} \quad \text{και} \quad f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα
και τα σημεία καμπής της f
φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
f(x)					

Οπότε, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -\sqrt{3}]$, κυρτή στο $[-\sqrt{3}, 0]$,

κοίλη στο $[0, \sqrt{3}]$, κυρτή στο $[\sqrt{3}, +\infty)$

Η f παρουσιάζει καμπή στα σημεία
 $\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}+2}{4}\right), (0, 1), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)$

γ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε ασύμπτωτη στο $-\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^3 + x} + \frac{1}{2x} \right) = 0 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Άρα η ευθεία $y = \frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $+\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^3 + x} + \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} \right) = 0 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = \frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f και στο $+\infty$.

δ) Με βάση τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να χαράξουμε την γραφική παράσταση της f .

