

- α) i) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 2F(x) - (x-1)f(2)$, $x \in \mathbb{R}$
 Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$h'(x) \stackrel{F'(x)=f(x)}{=} 2f(x) - f(2) \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } h(1) = 2F(1) - (1-1)f(2) \stackrel{F(1)=0}{=} 0 \quad (2)$$

Ακόμη

$$2F(x) \geq (x-1)f(2) \Rightarrow 2F(x) - (x-1)f(2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) \geq 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} h(x) \geq h(1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ το οποίο είναι και εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, και άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$h'(1) = 0 \Rightarrow 2f(1) - f(2) \stackrel{f(1)=2}{=} 0 \Rightarrow 4 - f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 4$$

- ii) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και

$$f(1) = 2, f(2) = 4, \text{ άρα } f(1) < 3 < f(2)$$

οπότε σύμφωνα με το ενδιάμεσων τιμών τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in (1, 2), \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = 3$$

- iii) Η f είναι

συνεχής στο διάστημα $[1, x_0]$

παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, x_0)$

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (1, x_0)$,

$$\text{άρα } \xi_1 \in (1, 2) \text{ με } f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} \stackrel{f(x_0)=3, f(1)=2}{=} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{1}{x_0 - 1} \quad (3)$$

Ομοίως

Η f είναι

συνεχής στο διάστημα $[x_0, 2]$

παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x_0, 2)$

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, 2)$,

$$\text{άρα } \xi_2 \in (1, 2) \text{ με } f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} \stackrel{f(2)=4, f(x_0)=3}{\Rightarrow} f'(\xi_2) = \frac{1}{2 - x_0} \quad (4)$$

Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 2)$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} \stackrel{(3),(4)}{=} \frac{1}{\frac{1}{x_0 - 1}} + \frac{1}{\frac{1}{2 - x_0}} = \cancel{x_0} - 1 + 2 - \cancel{x_0} = 1$$

β) i) Η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, ως πηλίκο συνεχών

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$, ως πηλίκο παραγωγισίμων με

$$\varphi'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(1) &= \frac{f(1)}{1} \stackrel{f(1)=2}{\Rightarrow} \varphi(1) = 2 \\ \varphi(2) &= \frac{f(2)}{2} \stackrel{f(2)=4}{\Rightarrow} \varphi(2) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(1) = \varphi(2)$$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την συνάρτηση

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ στο διάστημα } [1, 2]$$

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\xi) = 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \quad (6)$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $K(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

στην οποία αν θέσουμε $x = y = 0$ έχουμε

$$0 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow -f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \text{ που ισχύει λόγω της } (6)$$

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $K(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

γ) i) Έχουμε

$$f(1) = 2 \stackrel{f(x)=\alpha+\beta(x-1)^v}{\Rightarrow} \alpha + \beta(1-1)^v = 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$f(2) = 4 \stackrel{f(x)=\alpha+\beta(x-1)^v}{\Rightarrow} \alpha + \beta(2-1)^v \stackrel{\alpha=2}{=} 4 \Rightarrow \beta = 2$$

ii) Για $\alpha = 2$ και $\beta = 2$ είναι

$$f(x) = 2 + 2(x-1)^v \Rightarrow f'(x) = 2v(x-1)^{v-1} \quad (7)$$

Οπότε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντίστοιχα

$$\lambda_1 = f'(x_1) = 2v(x_1-1)^{v-1} \text{ και } \lambda_2 = f'(x_2) = 2v(x_2-1)^{v-1}$$

Οπότε για να είναι παράλληλες, αρκεί να αποδειχτεί ότι

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow 2\cancel{v}(x_1-1)^{v-1} = 2\cancel{v}(x_2-1)^{v-1} \stackrel{v \text{ περιττός} \Rightarrow v-1 \text{ άρτιος}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x_1-1) = \pm (x_2-1) \stackrel{x_1 \neq x_2}{\Leftrightarrow} (x_1-1) = -(x_2-1) \Leftrightarrow x_1-1 = -x_2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2 \text{ που ισχύει άρα}$$

οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$, είναι παράλληλες