

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x - x$, $x \geq 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = e^x - 1 \xrightarrow{x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0} h'(x) \geq 0$
(η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$)

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Οπότε για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι
 $x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) \Rightarrow e^x - x \geq e^0 - 0 \Rightarrow e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0 \Rightarrow e^x > x$

β) $f(x)e^{f(x)} = x \xrightarrow{x=0} f(0)e^{f(0)} = 0 \xrightarrow{e^{f(0)} \neq 0} f(0) = 0$ (1)

Επειδή η f γνησίως μονότονη, θα είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Τότε

$$1 > 0 \xrightarrow{f \searrow} f(1) < f(0) \xrightarrow{(1)} f(1) < 0 \text{ \underline{άτοπο} διότι}$$

$$f(x)e^{f(x)} = x \xrightarrow{x=1} f(1)e^{f(1)} = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e^{f(1)}} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ είναι

$$\text{για κάθε } x > 0 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) > f(0) \xrightarrow{f(0)=0} f(x) > 0 \quad (2)$$

Ακόμη

$$f(x)e^{f(x)} = x \Rightarrow \ln[f(x)e^{f(x)}] = \ln x \Rightarrow \ln f(x) + \ln e^{f(x)} = \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln f(x) + f(x) \quad (3)$$

$$\frac{\ln x}{2} < f(x) \Leftrightarrow \ln x < 2f(x) \xrightarrow{(3)} \ln f(x) + \cancel{f(x)} < \cancel{2}f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) < f(x) \Leftrightarrow e^{\ln f(x)} < e^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) < e^{f(x)} \text{ \underline{που ισχύει} λόγω του} \\ \text{ερωτήματος α) και της (2)}$$

$$\text{Άρα ισχύει και η σχέση } \frac{\ln x}{2} < f(x) \quad (4)$$

Ακόμη

$$f(x) < x \Leftrightarrow f(x) < f(x)e^{f(x)} \Leftrightarrow 1 < e^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ που ισχύει λόγω της } (2)$$

$$\text{Άρα ισχύει και η σχέση } f(x) < x \quad (5)$$

$$\text{Από (4) και (5)} \Rightarrow \frac{\ln x}{2} < f(x) < x \text{ για κάθε } x > 0$$

δ) Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} f(x) > \frac{\ln x}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (6)$$

Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \stackrel{(1), (6)}{=} [0, +\infty)$$

Επίσης επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f και ακόμα

$$f(x)e^{f(x)} = x \quad \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x))e^{f(f^{-1}(x))} = f^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = xe^x, \quad x \in [0, +\infty)$$

ε) Έχουμε

$$f^{-1}(x) = xe^x \Rightarrow f^{-1}(1) = 1 \cdot e^1 \Rightarrow f^{-1}(1) = e \Rightarrow f(e) = 1$$

στ) Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\ln x}{2} < f(x) < x \stackrel{x^2 > 0}{\Rightarrow} \frac{\ln x}{2x^2} < \frac{f(x)}{x^2} < \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2} \stackrel{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0 \end{array} \right\} \stackrel{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

Οπότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της h

ζ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^e \left| f(x) \right| dx = \int_0^e f(x) dx$$

$\begin{matrix} \text{θέτουμε } y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y) & \xrightarrow{\gamma) \text{ πρόσημα}} & x=ye^y \Rightarrow dx=(e^y+ye^y)dy \\ = & & \\ \text{για } x=0 \Rightarrow y=f(0)=0 & & \\ \text{για } x=e \Rightarrow y=f(e) & \xrightarrow{\delta) \text{ πρόσημα}} & = 1 \end{matrix}$

$$= \int_0^1 y(e^y + ye^y) dy = \int_0^1 (y + y^2) e^y dy = \int_0^1 (y + y^2) (e^y)' dy =$$

$$= \left[(y + y^2) e^y \right]_0^1 - \int_0^1 (y + y^2)' e^y dy = 2e - \int_0^1 (1 + 2y) e^y dy =$$

$$= 2e - \int_0^1 (1 + 2y) (e^y)' dy = 2e - \left[(1 + 2y) e^y \right]_0^1 + \int_0^1 2e^y dy =$$

$$= 2e - (3e - 1) + \left[2e^y \right]_0^1 = 2e - 3e + 1 + 2e - 2 = e - 1$$