Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.147

α) $e^{f(x)}+\ln f(x)=x+e \overset{x=0}{\Rightarrow} e^{f(0)}+\ln f(0)=e \Rightarrow e^{f(0)}+\ln f(0)-e=0 \quad (1)$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x)=e^x+\ln x-e$, x>0

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x} \overset{x>0}{\Rightarrow} h'(x)>0$ για κάθε x>0 , άρα <u>η h είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1</u>

Ακόμη είναι h(1)=0 οπότε

$$(1) \Rightarrow h(f(0))=0 \overset{h(1)=0}{\Rightarrow} h(f(0))=h(1) \overset{h:1-1\ ,\ f(0)>0}{\Rightarrow} f(0)=1$$

β) i) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=\ln x-x$, x>0

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) , με $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

Οπότε $g'(x)=0 \Rightarrow x=1$

Τα πρόσημα της g' , η μονοτονία της g και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$	
$g(x)$			$\nearrow$	$\boxed{-1}$ max	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g έχει ολικό μέγιστο στο $x_o=1$, ίσο με -1. Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι

$g(x)\le -1 \Rightarrow g(x)<0 \Rightarrow \ln x-x<0 \Rightarrow \ln x<x \quad (1)$

Ακόμη $\ln x<x \Rightarrow e^{\ln x}<e^x \Rightarrow x<e^x \quad (2)$

$(1)\ ,\ (2) \Rightarrow \ln x<x<e^x$ για κάθε $x>0$

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει

$$e^x>\ln x \overset{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)}{\Rightarrow} e^{f(x)}>\ln f(x) \overset{\text{προσθέτουμε } e^{f(x)}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}+e^{f(x)}>\ln f(x)+e^{f(x)} \Rightarrow 2e^{f(x)}>\ln f(x)+e^{f(x)} \overset{e^{f(x)}+\ln f(x)=x+e}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2e^{f(x)}>x+e \Rightarrow e^{f(x)}>\frac{x+e}{2} \Rightarrow f(x)>\ln\frac{x+e}{2} \text{ για κάθε } x>0$$

iii) Από το ερώτημα β) i) για κάθε $x>0$, θα είναι

$$\ln x < e^{x} \overset{\text{θέτουμε όπου x το } f(x)}{\Rightarrow} \ln f(x) < e^{f(x)} \quad (3)$$

<u>Η σχέση (3) ισχύει για κάθε x∈R</u> διότι f(x)>0

Οπότε <u>για κάθε x∈R</u> , έχουμε

$$(3) \overset{\text{προσθέτουμε } \ln f(x)}{\Rightarrow} \ln f(x) + \ln f(x) < \ln f(x) + e^{f(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln f(x) < \ln f(x) + e^{f(x)} \overset{e^{f(x)}+\ln f(x)=x+e}{\Rightarrow} 2\ln f(x) < x + e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln f(x) < \frac{x+e}{2} \Rightarrow e^{\ln f(x)} < e^{\frac{x+e}{2}} \Rightarrow f(x) < e^{\frac{x+e}{2}}$$

και επειδή , $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, θα είναι

$$0 < f(x) < e^{\frac{x+e}{2}} \text{ για κάθε } x \in R$$

γ) $$e^{f(x)} + \ln f(x) = x + e \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} e^{f(x)} f'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} f'(x) f(x) + f'(x) = f(x) \Rightarrow f'(x)\left[e^{f(x)} f(x) + 1\right] = f(x) \Rightarrow$$

$$\overset{f(x)>0 \Rightarrow e^{f(x)} f(x)+1 \neq 0}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{f(x)}{e^{f(x)} f(x) + 1}$$

δ) Από το προηγούμενο ερώτημα και επειδή $f(x) > 0$ για κάθε x∈R , προκύπτει ότι <u>f ′(x)>0 για κάθε x∈R</u>

Άρα η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R , επομένως το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) \quad (4)$$

Ακόμη

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x+e}{2}} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\frac{x+e}{2} \\ \text{όταν } x\to-\infty \Rightarrow y\to-\infty}}{=} \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0 \\ 0 < f(x) < e^{\frac{x+e}{2}} \end{array}\right\} \overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad (5)$$

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x+e}{2} \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\frac{x+e}{2} \\ \text{όταν } x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty}}{=} \lim_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$$

και επειδή $f(x) > \ln\frac{x+e}{2}$, για κάθε $x>0$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (6)

$$(4) \overset{(5),(6)}{\Rightarrow} f(A) = (0,+\infty)$$

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , θα είναι και 1−1 άρα αντιστρέψιμη. Ακόμη

$$e^{f(x)} + \ln f(x) = x + e \overset{\text{θέτουμε όπου x το } f^{-1}(x)}{=}$$

$$\Rightarrow e^{f\left(f^{-1}(x)\right)} + \ln f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(x) + e \overset{f\left(f^{-1}(x)\right)=x}{\Rightarrow} f^{-1}(x) = e^x + \ln x - e \quad (7)$$

Το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$E = \int_0^1 |f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_0^1 f(x)dx \underset{\substack{\text{για } x=0\Rightarrow y=f(0)=1 \\ \text{για } x=1\Rightarrow y=f(1)}}{\overset{\text{θέτουμε } y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)\overset{(7)}{\Rightarrow} x=e^y+\ln y-e\Rightarrow dx=\left(e^y+\frac{1}{y}\right)dy}{=}}$$

$$= \int_0^{f(1)} y\left(e^y + \frac{1}{y}\right)dy = \int_0^{f(1)} \left(ye^y + 1\right)dy = \int_0^{f(1)} ye^y dy + \int_0^{f(1)} 1dy =$$

$$= f(1) + \int_0^{f(1)} y\left(e^y\right)' dy = f(1) + \left[ye^y\right]_0^{f(1)} - \int_0^{f(1)} e^y dy =$$

$$= f(1) + f(1)e^{f(1)} - \left[e^y\right]_0^{f(1)} = f(1) + f(1)e^{f(1)} - e^{f(1)} + 1$$