Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.146

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x)=e^{2x}-2x-1$, $x\in R$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R , ως πράξεις παραγωγισίμων , με
$h'(x)=2e^{2x}-2=2\left(e^{2x}-1\right)$
Οπότε $h'(x)=0\Rightarrow e^{2x}=1\Rightarrow e^{2x}=e^{0}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		−	0	+	
h(x)		↘	$\boxed{0}$ min	↗	

Επομένως
για κάθε $x<0\overset{h\downarrow}{\Rightarrow}h(x)<h(0)\Rightarrow e^{2x}-2x-1<e^{2\cdot 0}-2\cdot 0-1$
$\Rightarrow e^{2x}-2x-1<0$ (1)
για κάθε $x>0\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)>h(0)\Rightarrow e^{2x}-2x-1>e^{2\cdot 0}-2\cdot 0-1$
$\Rightarrow e^{2x}-2x-1>0$ (2)
Άρα από (1) και (2) προκύπτει ότι
για κάθε $x\in R^{*}$ ισχύει $\boxed{e^{2x}-2x-1>0}$

β) Για κάθε $x>0$ έχουμε
$$xf'(x)\geq e^{2x}-2x-1\overset{x>0}{\Rightarrow}f'(x)\geq\frac{e^{2x}-2x-1}{x}\overset{e^{2x}-2x-1>0}{\Rightarrow}f'(x)>0$$
Ενώ για κάθε $x<0$ έχουμε
$$xf'(x)\geq e^{2x}-2x-1\overset{x<0}{\Rightarrow}f'(x)\leq\frac{e^{2x}-2x-1}{x}\overset{e^{2x}-2x-1>0}{\Rightarrow}f'(x)<0$$
Άρα η f είναι <u>γνησίως αύξουσα</u> στο διάστημα $[0,+\infty)$
και <u>γνησίως φθίνουσα</u> στο διάστημα $(-\infty,0]$

Ακόμη
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-2x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{1}=0$$
Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συμπεραίνουμε ότι η f' θα είναι παραγωγίσιμη , άρα και συνεχής οπότε
Για κάθε $x>0$ έχουμε
$$xf'(x)\geq e^{2x}-2x-1\overset{x>0}{\Rightarrow}f'(x)\geq\frac{e^{2x}-2x-1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^{+}}f'(x)\geq\lim_{x\to 0^{+}}\frac{e^{2x}-2x-1}{x}\underset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x}=0}{\overset{f'\text{συνεχής στο }0}{\Rightarrow}}f'(0)\geq 0\quad(3)$$

Για κάθε $x<0$ έχουμε
$$xf'(x)\geq e^{2x}-2x-1\overset{x<0}{\Rightarrow}f'(x)\leq\frac{e^{2x}-2x-1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x) \le \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-2x-1}{x} \overset{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x}=0}{\underset{f'\text{ συνεχής στο } 0}{\Rightarrow}} f'(0) \le 0 \quad (4)$$

Άρα από (3) και (4) $\Rightarrow \boxed{f'(0)=0}$

γ) Έχουμε

$$xf'(x) \ge e^{2x}-2x-1 \overset{\text{διαιρούμε με } x^2>0}{\Rightarrow} \frac{f'(x)}{x} \ge \frac{e^{2x}-2x-1}{x^2} \overset{f'(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \ge \frac{e^{2x}-2x-1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \ge \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(0) \ge \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^2} \quad (5)$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^2} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-2x-1\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{2x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{2} = 2$$

Άρα (5) $\Rightarrow \boxed{f''(0) \ge 2}$

δ) Από το Α. ερώτημα είδαμε ότι η συνάρτηση $h(x)=e^{2x}-2x-1$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x>1$ έχουμε

$$x>1 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)>h(1) \Rightarrow e^{2x}-2x-1 > e^{2\cdot 1}-2-1$$

$$\Rightarrow e^{2x}-2x-1 > e^2-3 \overset{e^2-3>4-3\Rightarrow e^2-3>1}{\Rightarrow} e^{2x}-2x-1>1 \quad (6)$$

Άρα

$$xf'(x) \ge e^{2x}-2x-1 \overset{(6)}{\Rightarrow} \boxed{xf'(x)>1}$$

ε) Από προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι για κάθε $x>1$ ότι

$$f'(x) > \frac{1}{x} \quad (7)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση Φ με $\Phi(x)=f(x)-\ln x$, $x\in[1,+\infty)$

Η Φ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων με

$$\Phi'(x)=f'(x)-\frac{1}{x} \overset{(7)}{\Rightarrow} \Phi'(x)>0$$

Άρα η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε για κάθε $x>1$ έχουμε

$$x>1 \overset{\Phi\nearrow}{\Rightarrow} \Phi(x)>\Phi(1) \Rightarrow f(x)-\ln x > f(1)-\cancel{\ln 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) > f(1)+\ln x \overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(1)+\ln x]=+\infty}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

στ) Θεωρούμε την συνάρτηση Ψ με

$$\Psi(x)=F(x)-xf(1)-F(0)+1 \ , \ x\in[0,1]$$

Η συνάρτηση Ψ είναι <u>συνεχής</u> ως πράξεις συνεχών στο διάστημα $[0,1]$

$$\Psi(0)=\cancel{F(0)}-0\cdot f(1)-\cancel{F(0)}+1\Rightarrow\Psi(0)=1\Rightarrow\Psi(0)>0$$

και

$$\Psi(1)=F(1)-1\cdot f(1)-F(0)+1\overset{F(1)-F(0)=\int_0^1 f(x)dx}{=}\int_0^1 f(x)dx-f(1)+1$$

$$=\int_0^1 (x)'f(x)dx-f(1)+1=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx-f(1)+1=$$

$$=\cancel{1\cdot f(1)}-0f(0)-\int_0^1 xf'(x)dx-\cancel{f(1)}+1=1-\int_0^1 xf'(x)dx$$

Όμως

$$xf'(x)\geq e^{2x}-2x-1\Rightarrow\int_0^1\left(e^{2x}-2x-1\right)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1 xf'(x)dx\geq\left[\frac{e^{2x}}{2}-x^2-x\right]_0^1\Rightarrow\int_0^1 xf'(x)dx\geq\frac{e^{2\cdot 1}}{2}-1^2-1-\frac{e^0}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1 xf'(x)dx\geq\frac{e^2-5}{2}\Rightarrow-\int_0^1 xf'(x)dx\leq-\frac{e^2-5}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\int_0^1 xf'(x)dx\leq 1-\frac{e^2-5}{2}\overset{\Psi(1)=1-\int_0^1 xf'(x)dx}{\Rightarrow}\Psi(1)\leq\frac{7-e^2}{2}\overset{e^2\approx 7,29\Rightarrow\frac{7-e^2}{2}<0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\boxed{\Psi(1)<0}$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η συνάρτηση Ψ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$, άρα

η εξίσωση $F(x)=xf(1)+F(0)-1$ έχει <u>τουλάχιστον μία</u> λύση στο διάστημα $(0,1)$

Ακόμη

Η συνάρτηση Ψ είναι παραγωγίσιμη με

$$\Psi'(x)=F'(x)-f(1)=f(x)-f(1)\overset{x>1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(1)}{\Rightarrow}\Psi'(x)>0$$

Άρα η συνάρτηση Ψ είναι γνησίως αύξουσα και άρα $1-1$ όποτε η συνάρτηση Ψ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Άρα τελικά

η εξίσωση $F(x)=xf(1)+F(0)-1$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0,1)$