

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με :

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{xe^{x-1} - 1}{x}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = xe^{x-1} - 1, x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = (x+1)e^{x-1} > 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Οπότε με $0 < x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

και με $x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Τα πρόσημα της f' η
μονοτονία και τα ακρότατα της
 f φαίνονται στον διπλανό
πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			$\swarrow$ 1 $\searrow$ ολικό ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0, 1]$

Άρα $f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right)$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x-1} - \ln x) = \frac{1}{e} - (-\infty) = +\infty$$

Οπότε $f(A_1) = [1, +\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$

Άρα $f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} \left(1 - \frac{\ln x}{e^{x+1}} \right) = +\infty, \text{ γιατί}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$, και

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{x+1}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^{x+1}} = 0$

Οπότε $f(A_2) = [1, +\infty)$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A_1) \cup f(A_2) = [1, +\infty)$

Γ2. Με βάση τον πίνακα μονοτονίας του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε ότι

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Άρα έχουμε : } f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}$$

- $\frac{3}{2} \in f(A_1) = [1, +\infty)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 στο A_1

Οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_1 \in A_1$

- $\frac{3}{2} \in f(A_2) = [1, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 στο A_2

Οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_2 \in A_2$

Συνολικά η εξίσωση έχει δύο θετικές λύσεις

Γ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(\xi, f(\xi))$

έχει εξίσωση: $\varepsilon: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Θέλουμε $M\left(0, \frac{3}{2}\right) \in \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{2} - f(\xi) = -f'(\xi) \cdot \xi$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = xf'(x) - f(x) + \frac{3}{2}$, $x \in [x_1, 1]$

Είναι $f'(x) = \frac{xe^{x-1} - 1}{x}$ οπότε η f' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

συναρτήσεων

Επομένως

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[x_1, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(x_1) &= x_1 f'(x_1) - f(x_1) + \frac{3}{2} \stackrel{f(x_1)=\frac{3}{2}}{=} x_1 f'(x_1) < 0 \text{ αφού } 0 < x_1 < 1 \\ h(1) &= f'(1) - f(1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(x_1) \cdot h(1) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (x_1, 1)$

τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - f(\xi) = -\xi f'(\xi)$, που είναι το ζητούμενο

Ακόμη $h'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) > 0$

αφού $f''(x) = \frac{x^2 e^{x-1} + 1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και 1-1, οπότε η ρίζα ξ είναι μοναδική