

Δ1. Έχουμε

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x \Rightarrow$$

$$\stackrel{f: \text{παραγωγίσιμη}}{\Rightarrow} f'(x)e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) + e^{f(x)}(2f(x)f'(x) - 2f'(x)) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}[f'(x)f^2(x) - 2f'(x)f(x) + 3f'(x) + 2f'(x)f(x) - 2f'(x)] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}f'(x)[f^2(x) + 1] = 1 \stackrel{e^{f(x)}[f^2(x)+1] \neq 0}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}[f^2(x) + 1]} > 0, \text{ για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και 1-1, δηλαδή αντιστρέφεται

Η $f^{-1}(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = \mathbb{R}$

$$\text{Ισχύει: } e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$

$$\text{Έστω } f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y), y \in f(A) = \mathbb{R}$$

$$\text{Τότε } e^y(y^2 - 2y + 3) = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Έστω $g(x) = f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη με :

$$g'(x) = e^x(x^2 - 2x + 3) + e^x(2x - 2) \Rightarrow g'(x) = e^x(x^2 + 1)$$

$$\text{και } g''(x) = e^x(x^2 + 1) + e^x \cdot 2x \Rightarrow g''(x) = e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x(x + 1)^2 \geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = -1$, άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x = 0$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ έχει εξίσωση :

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 3 = x \Rightarrow y = x + 3$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το :

$$E(\Omega) = \int_0^1 |g(x) - (x + 3)| dx$$

$$\text{Όμως η } g \text{ είναι κυρτή, άρα } g(x) \geq x + 3 \Rightarrow |g(x) - (x + 3)| = g(x) - x - 3$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_0^1 (g(x) - x - 3) dx = \int_0^1 e^x(x^2 - 2x + 3) dx - \int_0^1 (x + 3) dx =$$

$$= \left[e^x(x^2 - 2x + 3) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x(2x - 2) dx - \left[\frac{(x + 3)^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \left[e^x(x^2 - 2x + 3) \right]_0^1 - \left[e^x(2x - 2) \right]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx - \left[\frac{(x + 3)^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= 2e - 3 - 0 + 2e - 2 - \frac{16}{2} + \frac{9}{2} = 4e - \frac{21}{2}$$

Δ3. i) Για κάθε $x \in f(A) = \mathbb{R}$, ισχύει :

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow [f(f^{-1}(x))]' = (x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(x))' \cdot f'(f^{-1}(x)) = 1, \text{ που είναι το ζητούμενο}$$

$$\text{ii) } d(x) = (AB) = \sqrt{2(x - f^{-1}(x))^2} \Rightarrow d(x) = \sqrt{2}|x - f^{-1}(x)|$$

$$\text{Όμως } f^{-1}(x) \geq x + 3 > x \Rightarrow |x - f^{-1}(x)| = f^{-1}(x) - x$$

$$\text{Άρα } d(x) = \sqrt{2}(f^{-1}(x) - x)$$

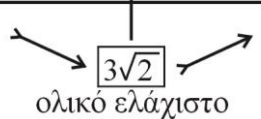
Η d είναι παραγωγίσιμη με :

$$d'(x) = \sqrt{2} \left((f^{-1}(x))' - 1 \right) \Rightarrow d'(x) = \sqrt{2} (e^x (x^2 + 1) - 1)$$

Παρατηρούμε ότι $d(0) = 0$, και αυτή είναι η μοναδική ρίζα της d' ,

καθώς $d''(x) = \sqrt{2}e^x (x^2 + 2x + 1) = \sqrt{2}e^x (x + 1)^2 \geq 0$, (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$) άρα η d' είναι γνησίως αύξουσα

Τα πρόσημα της d' η μονοτονία και τα ακρότατα της d φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$			

Η d παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και η ελάχιστη απόσταση (AB) είναι η

$$d(0) = \sqrt{2}f^{-1}(0) = 3\sqrt{2}$$