

Γ1. Είναι

- $f(0) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{\frac{\ln x}{x} = y}{=} \lim_{\substack{\frac{\ln x}{x} = y \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty}} e^y = 0$

Άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \text{ με } f(e) = e^{\frac{\ln e}{e}} = e^{\frac{1}{e}}$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$				$e^{\frac{1}{e}}$	



 ολικό
μέγιστο

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, e]$, αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e)$ και η f συνεχής στο $[0, e]$

$$\text{Άρα } f([0, e]) = [f(0), f(e)] = \left[0, e^{\frac{1}{e}} \right]$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ αφού $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (e, +\infty)$ και η f συνεχής στο $(e, +\infty)$

$$\text{Άρα } f([e, +\infty)) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{\frac{\ln x}{x} = y}{=} \lim_{\substack{\frac{\ln x}{x} = y \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0}} e^y \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f([e, +\infty)) = \left(1, e^{\frac{1}{e}} \right)$$

$$\text{Το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το } \left[0, e^{\frac{1}{e}} \right] \cup \left(1, e^{\frac{1}{e}} \right) = \left[0, e^{\frac{1}{e}} \right]$$

Γ3. i) $f(x) = f(4) \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln 4}{4}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4 \ln x = x \ln 4 \Leftrightarrow \ln x^4 = \ln 4^x \Leftrightarrow x^4 = 4^x$$

ii) Λόγω του προηγούμενου ερωτήματος ψάχνουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = f(4)$

$$\text{Προφανώς } 2^4 = 4^2 \Leftrightarrow f(4) = f(2)$$

$2 \in [0, e]$ και η f είναι 1-1 στο $[0, e]$ άρα η $x = 2$, είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = f(4)$ στο $[0, e]$
 Επίσης $4^4 = 4^4 \Leftrightarrow f(4) = f(4)$
 $4 \in [e, +\infty)$ και η f είναι 1-1 στο $[e, +\infty)$. Άρα η $x = 4$, είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης : $f(x) = f(4)$ στο $[e, +\infty)$
 Οπότε η εξίσωση $x^4 = 4^x \Leftrightarrow f(x) = f(4)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες , τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

Γ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x)F(x) - \sqrt{2}F(x)$, $x \in [2, 4]$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[2, 4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned}
 h(2) &= f(2)F(2) - \sqrt{2}F(2) = 0 \\
 h(4) &= F(4)(f(4) - \sqrt{2}) = \\
 &= F(4) \cdot \left(e^{\frac{\ln 4}{4}} - \sqrt{2} \right) \overset{e^{\frac{\ln 4}{4}} = \sqrt[4]{e^{\ln 4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}}{=} 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(2) = h(4)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (2, 4)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
 h'(\xi) &= 0 \Rightarrow f'(\xi)F(\xi) + f^2(\xi) - \sqrt{2}f(\xi) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f'(\xi)F(\xi) = f(\xi)(\sqrt{2} - f(\xi))
 \end{aligned}$$