Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.142 (2013 επαναληπτικές – Δ – διασκευασμένο)

Δ1. α) $f(x)f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$, άρα $f(x)\neq 0$, για κάθε $x>0$
και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$
Η συνάρτηση f

$$\left.\begin{array}{l}\text{είναι συνεχής στο } (0,+\infty)\\ f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε}$$

$x>0$
Είναι $f(1)=1>0$ άρα $f(x)>0$, για κάθε $x>0$

Ομοίως η συνάρτηση f'

$$\left.\begin{array}{l}\text{είναι συνεχής στο } (0,+\infty)\\ \text{(αφού η f είναι δύο φορές}\\ \quad\text{παραγωγίσιμη)}\\ f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{η } f' \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο για}$$

κάθε $x>0$

Είναι $f'(1)=1>0$ άρα $f'(x)>0$, για κάθε $x>0$

β) Οι f , f' , f'' είναι συνεχής στο $x_o=0$, άρα έχουμε :

$$f(x)f''(x)+1=\left[f'(x)\right]^2\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)f''(x)+1\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[f'(x)\right]^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}f(x)\cdot\lim_{x\to 0^+}f''(x)+1=\left[\lim_{x\to 0^+}f'(x)\right]^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0)\cdot f''(0)+1=\left(f'(0)\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(f'(0)\right)^2=1\underset{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\geq 0}{\overset{f'(x)>0}{\Rightarrow}}f'(0)=1$$

Δ2. α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με :

$$g'(x)=\frac{f''(x)\cdot f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}\overset{\substack{f(x)f''(x)+1=\left[f'(x)\right]^2\Rightarrow\\ \Rightarrow f(x)f''(x)-\left[f'(x)\right]^2=-1}}{=}\frac{-1}{f^2(x)}$$

$$g'(1)=-\frac{1}{f^2(1)}=-1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $(1,g(1))$ είναι :

$\varepsilon:\ y-g(1)=g'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=-(x-1)\Rightarrow y=2-x$

Η g είναι κυρτή , άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της , με εξαίρεση το σημείο επαφής

Άρα $g(x)\geq 2-x$, για κάθε $x>0$

β) $g(x)\geq 2-x$, για κάθε $x>0$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 2-x \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f'(x) \geq f(x)(2-x)$$, με την ισότητα να μην ισχύει

για κάθε $x \in (0,1)$

Άρα $\int_0^1 f'(x)dx > \int_0^1 f(x)(2-x)dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)(2-x)dx < \left[f(x)\right]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)(2-x)dx < 1$$

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$E(\Omega) = \int_0^1 |h(x)|dx = \int_0^1 \left|\left(f'(x)\right)^3\right|dx \overset{f'(x)>0}{=} \int_0^1 \left(f'(x)\right)^3 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \cdot f'(x)dx = \left[\left(f'(x)\right)^2 f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 2f'(x)f''(x)\cdot f'(x)dx =$$

$$= \left(f'(1)\right)^2 f(1) - \left(f'(0)\right)^2 \cdot f(0) - 2\int_0^1 f(x)\left(\left(f'(x)\right)^2 - 1\right)dx =$$

$$= 1 - 2\int_0^1 \left(f'(x)\right)^3 dx + 2\int_0^1 f'(x)dx =$$

$$= 1 - 2E(\Omega) + 2\int_0^1 f'(x)dx$$

Άρα

$$E(\Omega) = 1 - 2E(\Omega) + 2 \Rightarrow 3E(\Omega) = 3 \Rightarrow E(\Omega) = 1$$