Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.141 (2013 επαναληπτικές – Γ – διασκευασμένο)

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$2xf(x)+x^2(f'(x)-3)=-f'(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=-f'(x)+3x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left[x^2f(x)\right]'=\left[-f(x)+x^3\right]'\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2f(x)=-f(x)+x^3+c$$

Για $x=1$, $f(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+1+c\Rightarrow c=0$

Άρα $x^2f(x)=-f(x)+x^3\Rightarrow\left(x^2+1\right)f(x)=x^3\overset{x^2+1\neq 0}{\Rightarrow}f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με :

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$$, για κάθε

$x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Γ2. Η f είναι συνεχής στο R και συνεπώς δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Αναζητούμε ασύμπτωτες της C_f στο $-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)=0=\beta$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$

Αναζητούμε ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x^3+x}{x^2+1}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0=\beta$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

Γ3. $f\left(5\left(x^2+1\right)^3-8\right)\leq f\left(8\left(x^2+1\right)^2\right)\overset{f:\nearrow}{\Rightarrow}5\left(x^2+1\right)^3-8\leq 8\left(x^2+1\right)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow 5\left(x^2+1\right)^3\leq 8\left(x^2+1\right)^2+8\Rightarrow 5\left(x^2+1\right)^3\leq 8\left[\left(x^2+1\right)^2+1\right]\Rightarrow$$

$$\overset{\left(x^2+1\right)^2+1\neq 0}{\Rightarrow}\frac{\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^2+1\right)^2+1}\leq\frac{8}{5}\Rightarrow f\left(x^2+1\right)\leq f(2)\Rightarrow$$

$$\overset{f:\nearrow}{\Rightarrow}x^2+1\leq 2\Rightarrow x^2\leq 1\Rightarrow x\in[-1,1]$$

Γ4. Θεωρούμε συνάρτηση $h:[0,1]\to R$ με $h(x)=xF(x^3-x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=F(x^3-x)+xF'(x^3-x)\cdot(x^3-x)' \overset{F'(x)=f(x)}{=} F(x^3-x)+x(3x^2-1)f(x^3-x)$$

$$\left.\begin{matrix} h(0)=0 \\ h(1)=F(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow h(0)=h(1)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$,

τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)=0\Rightarrow F(\xi^3-\xi)+x(3\xi^2-1)f(\xi^3-x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\xi^3-\xi)=-\xi(3\xi^2-1)f(\xi^3-\xi)$$