

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$xf(x) + 1 = e^x \Rightarrow xf(x) = e^x - 1$$

$$\text{Για } x \neq 0: f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\text{Για } x = 0: f(0) \stackrel{f: \text{συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH } x \rightarrow 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Γ2. Για $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με :

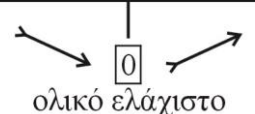
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = e^x x - e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = xe^x + e^x - e^x \Rightarrow h'(x) = xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Είναι $h'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, με $h(0) = 0$

Τα πρόσημα της h' και η μονοτονία της h φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			

Από τον πίνακα αυτό είναι φανερό ότι ισχύει $h(x) \geq h(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, και η f συνεχής στο $x_0 = 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και 1-1, δηλαδή αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f :

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\text{όπου } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH } x \rightarrow +\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Άρα } D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$$

Γ3. Ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH } x \rightarrow 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH } x \rightarrow 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = \frac{1}{2}$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(0,1)$, έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1$$

Η f είναι κυρτή, άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής

Άρα

$$f(x) \geq \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow 2f(x) - x \geq 2, \text{ με την ισότητα μόνο για } x = 0$$

Οπότε η εξίσωση $2f(x) - x = 2 \Leftrightarrow 2f(x) = x + 2$ έχει μία ακριβώς λύση και μάλιστα την $x = 0$

Γ4. Είναι

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f(x)) \stackrel{f(x)=y}{=} \lim_{\substack{y=1 \\ y \rightarrow 1}} \ln y = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x \cdot \ln f(x)) = 0 \cdot 0 = 0$$