

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.14

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 3x^2 + 3 - \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ισχύει } \begin{cases} 3(x^2 + 1) \geq 3 \\ \eta\mu x \leq 1 \end{cases} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3 \geq 3 \\ -\eta\mu x \geq -1 \end{cases} \xrightarrow[\text{κατά μέλη}]{\text{προσθέτουμε}} 3x^2 + 3 - \eta\mu x \geq 3 - 1 \Rightarrow f'(x) \geq 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

- β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(\pi) = \pi^3 + 3\pi - 3 > 0 \end{array} \right\} f(0) \cdot f(\pi) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, συνεπώς το x_0 είναι μοναδικό.

$$\gamma) f(x^2 + 8) = f(6x) \xrightarrow[f:1-1]{f \text{ γνησίως αύξουσα}} x^2 + 8 = 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4 \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \\ \searrow x_2 = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

- δ) Παρατηρούμε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (-1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 3 - \eta\mu 0 = 3$$