

Γ1. Έχουμε $x'(t) = 16 \Rightarrow x'(t) = (16t)' \Rightarrow x(t) = 16t + c$

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται στην αρχή O οπότε είναι

$$x(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } x(t) = 16t, \quad t \geq 0$$

Γ2. Το τελευταίο σημείο A της γραφικής παράστασης της f για το οποίο υπάρχει οπτική επαφή με τον παρατηρητή π , είναι αυτό στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το $\pi(0,1)$

$$\text{Έστω } A(x_0, f(x_0))$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

$$\pi(0,1) \in \varepsilon, \text{ άρα } 1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(0 - x_0) \Rightarrow \sqrt{x_0} = 2 \Rightarrow x_0 = 4 \text{ m}$$

Οπότε $x(t_0) = 4$ και άρα το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής

$$\text{έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το } A(4, f(4)) \stackrel{f(4)=2}{=} A(4, 2)$$

$$\text{Ακόμη } x(t_0) = 4 \Rightarrow 16t_0 = 4 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{4} \text{ min}$$

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδό είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$ και την εφαπτομένη στο σημείο $A(4,2)$

Η εφαπτομένη στο σημείο $A(4,2)$ έχει εξίσωση

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - 1 + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό (καθώς με βάση το σχήμα η εφαπτομένη βρίσκεται πάνω από την καμπύλη) θα είναι

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_0^4 \left[\left(\frac{1}{4}x + 1 \right) - \sqrt{x} \right] dx = \frac{1}{4} \int_0^4 x dx + \int_0^4 1 dx - \int_0^4 \sqrt{x} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 + 1 \cdot (4 - 0) - \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + 1 \cdot 4 - \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{1}{4} 8 + 4 - \left[\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 =$$

$$= 2 + 4 - \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^4 = 6 - \left(\frac{2\sqrt{64}}{3} - \frac{2\sqrt{0}}{3} \right) = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$$

Γ4. Η απόσταση (ΠΜ) δίνεται από τον τύπο :

$$(\text{ΠΜ}) = d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (\sqrt{x}-1)^2} = \sqrt{x^2 + x - 2\sqrt{x} + 1}, \quad x \in [0,4]$$

Η d είναι παραγωγίσιμη με :

$$d'(x) = \frac{2x+1-\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{2\sqrt{x^2+x-2\sqrt{x}+1}} = \frac{2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2+x-2\sqrt{x}+1}}$$

$$\text{Έστω } g(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1, \quad x \in [0, 4]$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$ με:

$$g'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, 4), \quad \text{άρα η } g \nearrow [0, 4]$$

Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο $[0, 4]$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = -1 < 0 \\ g(4) = 17 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(4) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0, 4)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g(\xi) = 0 \Rightarrow d(\xi) = 0$$

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$, άρα :

- $0 < x < \xi \Rightarrow (x) < (\xi) = 0 \Rightarrow d'(x) < 0$
- $\xi < x < 4 \Rightarrow (x) > (\xi) = 0 \Rightarrow d'(x) > 0$

Τα πρόσημα της d' και η μονοτονία της d φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	ξ	4	$+\infty$
$d'(x)$			- 0 +		
$d(x)$			↙ □ ↗ ΟΕ		

Οπότε στο $x_0 = \xi$ η d παρουσιάζει ελάχιστο.

Άρα υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ με $x(t_0) = \xi$, για την οποία η απόσταση

d γίνεται ελάχιστη