

Δ1. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 + f(0)$

$$\text{Είναι } h(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = xh(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xh(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \cdot (1 + f(0)) = 0$$

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, άρα :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(x)) = (0, 0)$ είναι :

$$\varepsilon : y - 0 = f'(0) \cdot x \Rightarrow y = x$$

Δ2. Η f'' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη. άρα έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} f'' : \text{συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } f'' \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}$$

Υποθέτουμε ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η $f' \searrow$. Τότε

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[0, 1]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$$

Όμως από εκφώνηση $f'(0) < f(1) - f(0) \Rightarrow f'(0) < f'(\xi) \Rightarrow 0 > \xi$, άτοπο διότι $\xi \in (0, 1)$

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι κυρτή

Δ3. Η f είναι κυρτή, άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Η $y = x$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $(0, 0)$,

άρα $f(x) \geq x \Rightarrow f(x) - x \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

Άρα η $g(x) \geq 0$, και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu x}}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu x}}{g(x)} = +\infty$$

διότι

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu x}}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f(0) - 0 = 0, \text{ και } g(x) > 0 \text{ για } x \neq 0 \text{ κοντά στο } 0$$

Δ4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g(x) \geq 0$ και η g δεν παντού μηδέν οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση θα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx > 0 &\Rightarrow \int_0^2 [f(x) - x] dx > 0 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 x dx > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx > \int_0^2 x dx \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx > \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx > \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \Rightarrow \\ &\int_0^2 f(x) dx > 2 \end{aligned}$$

Δ5. Το εμβαδόν του χωρίου που περιγράφεται είναι το :

$$E(\Omega) = \int_0^1 |g(x)| dx \stackrel{g(x) \geq 0}{=} \int_0^1 g(x) dx$$

$$\text{Άρα έχουμε } E(\Omega) = e - \frac{5}{2} \Rightarrow \int_0^1 (f(x) - x) dx = e - \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = e - \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = e - 2$$

$$\text{Δείξαμε ότι } \int_0^1 f(x) dx = e - 2 \Rightarrow \int_0^1 F'(x) dx = e - 2 \stackrel{F(0)=0}{\Rightarrow} F(1) = e - 2$$

$$\text{Έστω } t(x) = F(x) - 2, \quad x \in [1, 2]$$

Η συνάρτηση t

είναι συνεχής στο $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} t(1) &= F(1) - 2 = e - 2 - 2 = e - 4 < 0 \\ t(2) &= F(2) - 2 = \int_0^2 f(x) dx - 2 > 0 \text{ (από } \Delta_4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow t(1)t(2) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (1, 2)$

τέτοιο ώστε $t(\xi) = 0 \Rightarrow F(\xi) = 2$