

Γ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-2)\ln x + x - 3] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-2) \cdot \ln x] + 0 - 3 = -2 \cdot (-\infty) - 3 = +\infty\end{aligned}$$

Άρα η $y = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Αναζητούμε τώρα ασύμπτωτες στο $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)\ln x + x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-2)\ln x}{x} + \frac{x}{x} - \frac{3}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-2)\ln x}{x} + \frac{x}{x} - \frac{3}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \ln x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \ln x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 1 \cdot (-\infty) + 1 - 0 = -\infty\end{aligned}$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} + 1 \text{ παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με:}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-(x-2)}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$\text{για } x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \quad \begin{matrix} f'(1) = \ln 1 + \frac{1-2}{1} + 1 = 0 \\ \Rightarrow f'(x) > 0 \end{matrix}$$

$$\text{για } x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \quad \begin{matrix} f'(1) = \ln 1 + \frac{1-2}{1} + 1 = 0 \\ \Rightarrow f'(x) < 0 \end{matrix}$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Γ3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0, 1]$, άρα

$$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-2, +\infty)$$

Επομένως $0 \in f(A_1)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 ,

συμπεραίνουμε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο A_1

Ακόμη

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$, άρα

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty)$$

Επομένως $0 \in f(A_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 ,

συμπεραίνουμε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο A_2

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες

Γ4. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

$$\left. \begin{array}{l} h(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} = 0 \\ h(x_2) = \frac{f(x_2)}{x_2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(x_1) = h(x_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$, έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

Για $x = y = 0$ έχουμε $-f(\xi) = f'(\xi) \cdot (-\xi) \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$, που ισχύει

Άρα η ε διέρχεται από το $O(0,0)$