

α) Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο $[0, 2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων,
είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ καθώς η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
και

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= -f'(0) + 2f(0) = 0 \\ g(2) &= 12 - \frac{f'(2) - 2f(2)}{e^4} = \frac{12e^4 - f'(2) + 2f(2)}{e^4} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(0) = g(2)$$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x - \frac{(f''(x) - 2f'(x))e^{2x} - 2e^{2x}(f'(x) - 2f(x))}{e^{4x}} \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{6xe^{4x} - f''(x)e^{2x} + 2f'(x)e^{2x} + 2e^{2x}f'(x) - 4e^{2x}f(x)}{e^{4x}} \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{6xe^{4x} - f''(x)e^{2x} + 4e^{2x}f'(x) - 4e^{2x}f(x)}{e^{4x}} \end{aligned}$$

Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= 0 \Rightarrow 6\xi e^{4\xi} - f''(\xi)e^{2\xi} + 4e^{2\xi}f'(\xi) - 4e^{2\xi}f(\xi) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi) &= f''(\xi) + 4f(\xi) \end{aligned}$$

γ) Από ερώτημα β), έχουμε :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x - \frac{(f''(x) - 2f'(x)) - 2(f'(x) - 2f(x))}{e^{2x}} \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(x) &= 6x - \frac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow g'(x) = 6x - \frac{\kappa x e^{2x}}{e^{2x}} \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(x) &= 6x - \kappa x \Rightarrow g'(x) = (6 - \kappa)x \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } g'(\xi) = 0 \xrightarrow{g'(x) = (6-\kappa)x} (6 - \kappa)\xi = 0 \xrightarrow{\xi \in (0,2) \Rightarrow \xi \neq 0} 6 - \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 6$$

Για $\kappa = 6$ είναι $g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$, για κάθε $x \in [0, 2]$

Όμως είδαμε ότι $g(0) = 0$, επομένως $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [0, 2]$

δ) $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} &= 0 \Rightarrow 3x^2 e^{2x} = f'(x) - 2f(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x^2 &= e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) \Rightarrow (x^3)' = (e^{-2x}f(x))' \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 &= e^{-2x}f(x) + c_1 \end{aligned}$$

$$\text{Για } x=1, f(1) = e^2 \Rightarrow 1^3 = e^{-2} \cdot e^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\text{Άρα } f(x)e^{-2x} = x^3 \Rightarrow f(x) = x^3 e^{2x} \text{ για κάθε } x \in [1, 2]$$

$$\epsilon) \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{x^3 e^{2x}}{x^2} dx = \int_1^2 x e^{2x} dx = \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx = \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{2e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{3e^4}{4} - \frac{e^2}{4}$$