

A) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln[(\lambda+1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} \right]$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- Αν $\lambda > -1$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda+1)x = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} \right) = +\infty \notin \mathbb{R}$$

- Αν $\lambda = -1$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y = \frac{x+1}{x+2} \\ \text{όταν } x \rightarrow +\infty \text{ } y \rightarrow 1}}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \ln y = 0 \in \mathbb{R}$$

Άρα για $\lambda = -1$ το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός

B) α) Για $\lambda = -1$ είναι $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-1, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \quad x > -1$$

Για $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$ και $x+2 > 0$, άρα η $f'(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$, όπου

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [\ln(x+1) - \ln(x+2)] = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \stackrel{\substack{\frac{x+1}{x+2} = u \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u = 1}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} (\ln u) = 0$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 0)$

β) Όπως δείξαμε, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, άρα $y = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

της γραφικής παράστασης της f

Η f δεν έχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

γ) Έχουμε ισοδύναμα $f(x) + a^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -a^2 \Leftrightarrow f(x) = \kappa$, $\kappa < 0$

Η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$, και είναι 1-1,

άρα η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $\kappa \in (-\infty, 0)$