

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με :

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x=1 \quad \text{με } f(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 0$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			↙ 0 ↘ ολικό ελάχιστο	

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο, το $f(1) = 1$

Άρα $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$

β) Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2\ln x) = +\infty$$

Άρα ο άξονας y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Αναζητούμε τώρα ασύμπτωτες στο $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2\ln x}{x} \right) = +\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2\ln x}{x} \right) \stackrel{+\infty}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\frac{2}{x}}{1} \right) = 0$$

Άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\gamma) \text{ i) Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f(x)} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{2x - \frac{2}{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^2 - 2} = -\frac{1}{2}$$

Για να είναι η g συνεχής στο $x_0 = 0$, πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \Rightarrow -\frac{1}{2} = \kappa$$

ii) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, e]$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = -\frac{1}{2} < 0 \\ g(e) \frac{1}{f(e)} = \frac{1}{e^2 - 2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(e) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano , η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, e)$