

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} = \frac{xe^x - e}{x}$$

Θέτουμε τώρα $h(x) = xe^x - e$, $x \in [0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

Προφανώς για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > 0$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Οπότε για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $xe^x > e \Rightarrow xe^x - e > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Άρα για κάθε $x > 1$ είναι

$$x > 1 \Rightarrow \overset{h' > 0}{h(x)} > \overset{h(1)=0}{h(1)} \Rightarrow xe^x - e > 0$$

Επομένως για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) = \frac{xe^x - e}{x} > 0$, και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$

β) Για $0 < x < 1$, και για την συνάρτηση h που ορίσαμε παραπάνω έχουμε

$$0 < x < 1 \Rightarrow \overset{h' < 0}{h(x)} < \overset{h(1)=0}{h(1)} \Rightarrow xe^x - e < 0$$

Για $x=1$, $f'(1) = \frac{e-e}{1} = 0$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			$\nwarrow$ e $\nearrow$ ολικό ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = e - e \ln 1 = e$

Άρα $f(x) \geq e$, για κάθε $x > 0$