

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{x} \stackrel{3x=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ u \rightarrow 0^-}} \frac{\eta\mu u}{\frac{u}{3}} = 3 \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων ,
με $f'(x) = 2x + \alpha - \beta \eta\mu x$

$$\text{Έχουμε } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2} + \alpha - \beta \eta\mu \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \pi + \alpha - \beta = \pi \Rightarrow \alpha = \beta \quad (1)$$

Έχουμε ακόμη ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ (από ερώτημα α)
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0^2 + \alpha \cdot 0 + \beta = \beta$

$$\text{Πρέπει } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \beta = 3$$

$$\text{Άρα η } (1) \Rightarrow \alpha = \beta = 3$$

$$\gamma) \text{ Για } \alpha = \beta = 3 \text{ είναι } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x} & , x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sigma\upsilon\nu x & , x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi (x^2 + 3x + 3\sigma\upsilon\nu x) = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3\eta\mu x \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 3\eta\mu 1 = \frac{11}{6} + 3\eta\mu 1 \end{aligned}$$