

α) i) Έστω $g(x) = \ln x$, $x > 0$

Η g είναι γνησίως αύξουσα, παραγωγίσιμη με $g'(x) = \frac{1}{x}$

Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο $[x, x+1]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1 - x} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x$$

$$\text{Όμως } \xi > x > 0 \Rightarrow \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Rightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - \frac{x+1}{x} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - 1 - \frac{1}{x} = \\ &= \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Για κάθε $x > 0$ δείξαμε ότι $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} < 0$ και $\frac{-1}{x+1} < 0$

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

γ) Η εξίσωση γράφεται :

$$(\alpha+1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha+1) = (\alpha+1) \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha+1) - (\alpha+1) \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα έχει σύνολο τιμών το

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right), \text{ όπου :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - (x+1) \ln x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(\ln(x+1) - \ln x) - \ln x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln x \right] =$$

$$= 1 - (+\infty) = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x+1) - (x+1) \ln x] = 0 \cdot \ln 1 - 1 \cdot (-\infty) = +\infty$

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε έχει τουλάχιστον μία ρίζα α .

Όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα και $f(1) = -1$, άρα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.