

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{x+1}) - e^{x+1}(1+e^x)}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^x - e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^x(1-e)}{(1+e^{x+1})^2}$$

Είναι $e \approx 2,718$ οπότε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{f(x)} \right) dx &= \int_0^1 \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{e \cdot e^x}{1+e^x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx + e \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \\ &= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 (\ln(1+e^x))' dx + e \int_0^1 (\ln(1+e^x))' dx = \\ &= 1 - 0 - [\ln(1+e^x)]_0^1 + e [\ln(1+e^x)]_0^1 = \\ &= 1 + \ln 2 - e \ln 2 - \ln(1+e) + e \ln(1+e) = \\ &= 1 + (e-1) \ln(e+1) + (1-e) \ln 2 \end{aligned}$$

$$\gamma) \quad \text{Για } x < 0, \quad 5^x > 6^x \xRightarrow{f \searrow} f(5^x) < f(6^x)$$

$$7^x > 8^x \xRightarrow{f \searrow} f(7^x) < f(8^x)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$