

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.13

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x - 3$$

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ άρα, σύμφωνα με το

Θεώρημα Fermat :

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

- β) Για $\lambda = 0$ η f γράφεται :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

$$\text{με } f(-1) = 3 \text{ και } f(1) = -1$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	Diagram illustrating the sign chart for the function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$. The x-axis is marked with $-\infty$, -1, 1, and $+\infty$. The derivative $f'(x)$ is positive for $x < -1$, zero at $x = -1$, negative for $-1 < x < 1$, zero at $x = 1$, and positive for $x > 1$. The function $f(x)$ is increasing for $x < -1$, has a local maximum at $x = -1$ with value 3 (labeled $\tau\mu$), is decreasing for $-1 < x < 1$, has a local minimum at $x = 1$ with value -1 (labeled $\tau\varepsilon$), and is increasing for $x > 1$.				

Οπότε, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο

$[-1, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Στο $x_0 = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το 3

Στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το -3

- γ) Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτομένη εφάπτεται στο σημείο

$(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f . Τότε θα έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αφού είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 9x$, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$9, \quad \text{άρα} \quad f'(x_0) = 9$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

$$\text{Για } x = -2, \quad f(-2) = -1$$

$$\text{Για } x = 2, \quad f(2) = 3$$

Αυτή η γραφική παράσταση της f έχει δύο εφαπτόμενες παράλληλες στην $y = 9x$:

$$\varepsilon_1: y + 1 = 9(x + 2) \Rightarrow y = 9x + 17$$

$$\varepsilon_2: y - 3 = 9(x - 2) \Rightarrow y = 9x - 15$$

- δ) Έστω $h(x) = f(x) - \sqrt{x}$, $x > 0$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= f(0) - 0 = 1 \\ h(1) &= f(1) - 1 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(1) = -2 < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$h(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

στο διάστημα $(0,1)$