

α) i) Έστω  $g(x) = \frac{f(x) - x}{x^2}$ ,  $x \neq 0$ . Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2005$

$$\text{Τότε } x^2 g(x) = f(x) - x \Rightarrow f(x) = x^2 g(x) + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 g(x) + x] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \cdot 2005 - 0 \quad \xRightarrow{f: \text{συνεχής} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 g(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} [xg(x) + 1]}{\cancel{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 1) = 0 \cdot 2005 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$ , με  $f'(0) = 1$

$$\text{β) Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \lambda \left( \frac{f(x)}{x} \right)^2}{2 + \left( \frac{f(x)}{x} \right)^2} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x} \right)^2}{2 + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x} \right)^2} = 3 \Rightarrow \frac{1 + \lambda [f'(0)]^2}{2 + [f'(0)]^2} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \lambda}{2 + 1} = 3 \Rightarrow 1 + \lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 8$$

γ) i) Έστω  $h(x) = e^{-x} f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη με  $h'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

$$\text{Με } x > 0 \xRightarrow{h \nearrow} h(x) > h(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \xRightarrow{x > 0} x f(x) > 0$$

$$\text{Με } x < 0 \xRightarrow{h \nearrow} h(x) < h(0) \Rightarrow e^{-x} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \xRightarrow{x < 0} x f(x) > 0$$

Άρα  $xf(x) > 0$  για κάθε  $x \neq 0$

$$\text{ii) Έχουμε } f'(x) > f(x) \Rightarrow \int_0^1 f'(x) dx > \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(x)]_0^1 > \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{f(0)=0} \int_0^1 f(x) dx < f(1)$$