

α) Έστω ότι η f δεν είναι 1-1

Τότε υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ (έστω $x_1 < x_2$) τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$,

τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, άτοπο καθώς $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η f είναι 1-1

β) Επειδή η f διέρχεται από το $A(1, 2005)$ θα είναι $f(1) = 2005$. Επειδή η f

διέρχεται από το $B(-2, 1)$ θα είναι $f(-2) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = -2$

$$f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2 \stackrel{f^{-1}(1)=-2}{\Rightarrow} f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = f^{-1}(1) \Rightarrow$$

$$\stackrel{f^{-1}, 1-1}{\Rightarrow} -2004 + f(x^2 - 8) = 1 \Rightarrow f(x^2 - 8) = 2005 \stackrel{f(1)=2005}{\Rightarrow} f(x^2 - 8) = f(1) \Rightarrow$$

$$\stackrel{f: 1-1}{\Rightarrow} x^2 - 8 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3$$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 668$

Πράγματι η συνάρτηση f :

είναι συνεχής στο $[-2, 1]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 1)$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0 \in (-2, 1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(x_0) = \frac{f(-2) - f(1)}{-2 - 1} = \frac{1 - 2005}{-3} = \frac{2004}{3} = 668$$