

- α) Η f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και δεν μηδενίζεται.
Οπότε:

$$\left. \begin{array}{l} f' \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \ f' \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}$$

Άρα : είτε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα ,
είτε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα

Σε κάθε περίπτωση , η f είναι γνησίως μονότονη

- β) Έχουμε ότι $f(x) = -f(2-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x=0$: $f(0) = -f(2)$

Αν $f(0) = f(2) = 0 \Rightarrow$ άτοπο , αφού η f γνησίως μονότονη άρα και $1-1$

Οπότε τα $f(0)$, $f(2)$ είναι ετερόσημα

Η συνάρτηση f :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Είναι συνεχής στο } [0,2] \\ f(0) = -f(2) < 0 \neq 0 \end{array} \right\} f(0) \cdot f(2) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano , υπάρχει $x_0 \in (0,2)$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι $1-1$, θα είναι μοναδικό

(Μάλιστα ισχύει $x_0 = 1$ αφού $f(1) = -f(2-1) \Rightarrow f(1) = 0$)

- γ) Έχουμε

$$f(x) = -f(2-x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f(1) = -f(2-1) \Rightarrow f(1) = -f(1) \Rightarrow 2f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

Οπότε

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(1) \xrightarrow{f:1-1} x = 1$$

Άρα η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της g στο $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)f'(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)} = \\ &= f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)} \stackrel{f': \text{συνεχής}}{=} f'(1) \cdot \frac{1}{f'(1)} = 1 \end{aligned}$$

Οπότε $g'(1) = 1 = \varepsilon\varphi 45^\circ$

Οπότε στο $(1,0)$, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g , σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 45°