ΘΕΜΑ 36.125 **(2003 επαναληπτικές – 4ο)**

α) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=+\infty$

β) Έχουμε

- $$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}=$$

$$\overset{\substack{|x|=-x\\ \text{για } x\to-\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)=-\sqrt{1}-1=-2$$

- $$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2=1}-x}=0$$

διότι από α) ερώτημα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$

Άρα η ευθεία $y=-2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$

Οπότε

$$f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x=$$

$$=x-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x=0$$

δ) Από το ερώτημα γ) έχουμε :

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=0\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(Είναι $f(x)\neq 0$ διότι

αν $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-x=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}^{\,2}=x^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+1=x^2\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο)

Άρα $$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=-\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\int_0^1\left(\ln f(x)\right)'dx=-\left[\ln f(x)\right]_0^1=$$

$$=-\ln f(1)+\ln f(0)=-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\ln 1=-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}=$$

$$= \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^{2}-1} = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$