

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.124 (2002 επαναληπτικές – 2ο)

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)' = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Προφανώς $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, δηλαδή είναι 1-1 και αντιστρέφεται

Τώρα θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} (δηλαδή το σύνολο τιμών της f)

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$

Οπότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το $A_{f^{-1}} = (-1, 1)$

Τέλος θα βρούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

$$\text{Θέτουμε } f(x) = y \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Rightarrow e^x - 1 = ye^x + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x(1 - y) = y + 1 \stackrel{(y \neq 1)}{\Rightarrow} e^x = \frac{y + 1}{1 - y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \Rightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \text{ με πεδίο ορισμού το } A_{f^{-1}} = (-1, 1)$$

β) Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0) = \ln\left(\frac{1 + 0}{1 - 0}\right) = \ln 1 = 0$

Δηλαδή η $f^{-1}(x)$ έχει ρίζα το μηδέν και επειδή η f^{-1} είναι 1-1 η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική

γ) Έστω $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$. Τότε

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx \Rightarrow I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) dx \Rightarrow$$

$$\stackrel{\substack{u = -x \\ du = -dx}}{\Rightarrow} I = -\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1 - u}{1 + u}\right) du \Rightarrow I = -\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} -\ln\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right) du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right) du \Rightarrow I = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

