

# Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

## ΘΕΜΑ 36.123 (2001 επαναληπτικές – 4ο – διασκευασμένο)

α) Η  $F(x)$  είναι παραγωγίσιμη με  $F'(x) = xf(x)$ ,  $x > 0$  από εκφώνηση

Άρα η  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{F(x)}{x^2}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως πράξεις

των παραγωγίσιμων  $\frac{1}{x}$ ,  $F(x)$ ,  $\frac{1}{x^2}$

β) Είναι  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{F(x)}{x^2} \Rightarrow x^2 f(x) = x = F'(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x^2 f(x))' = 1 + F'(x) \Rightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 + xf(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xf(x) + x^2 f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [xf(x)]' = [\ln x]' \Rightarrow xf(x) = \ln x + c \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x + c}{x}$$

$$\text{Είναι } F(1) = 0 \text{ και } f(1) = \frac{1}{1} + \frac{F(1)}{1^2} = 1$$

$$\text{Άρα } f(1) = \frac{0+c}{1} = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, x > 0$$

γ) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ με } f(1) = 1$$

Τα πρόσημα της  $f'$  η  
μονοτονία και τα ακρότατα  
της  $f$  φαίνονται στον διπλανό  
πίνακα

| x       | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $f'(x)$ |           |   | + | -         |
| $f(x)$  |           |   | 1 |           |

ολικό μέγιστο

Οπότε

- Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A_1 = (0, 1]$ , άρα  $f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right]$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$$

$$\text{Άρα } f(A_1) = (-\infty, 1)$$

- Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A_2 = [1, +\infty)$ , άρα

$$f(A_2) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right]$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Άρα } f(A_2) = (0, 1]$$

$$\text{Το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το } f(A_1) \cup f(A_2) = (0, 1] \cup [1, +\infty) = (0, +\infty)$$

δ) Η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο  $x_0 = 0$

από το ερώτημα γ) είδαμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , άρα ο άξονας  $y'y$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$

Η  $f$  δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής

Αναζητούμε ασύμπτωτες στο  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \text{ ( από ερώτημα γ )} \end{aligned}$$

Άρα ο άξονας  $x'x$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

ε) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το  $E(\Omega) = \int_1^e |f(x)| dx$

$$\text{Για } 1 < x < e \stackrel{f \searrow (1, +\infty)}{\Rightarrow} f(e) < f(x) < f(1) \Rightarrow \frac{2}{e} < f(x) < 1$$

Άρα  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (1, e)$  και  $|f(x)| = f(x)$  για κάθε  $x \in (1, e)$

$$\text{Οπότε } E(\Omega) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x dx =$$

$$= \int_1^e (\ln x)' dx + \int_1^e \left( \frac{\ln^2 x}{2} \right)' dx = [\ln x]_1^e + \left[ \frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e =$$

$$= \ln e - \ln 1 + \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$