

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x-1} \stackrel{\lim_{x \rightarrow 1} e^{-x+1} = 1}{\underset{0}{\underset{0}{\text{DLH}}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(-e^{-x+1})}{1} = e^{-1+1} = e^0 = 1$$

$$\beta) \text{ Πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + \alpha) = 1 + \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(1 - e^{-x+1}) \cdot \ln(x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{1 - e^{-x+1}}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-e^{-x+1}}{(1 - e^{-x+1})^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - e^{-x+1})^2}{(x-1)(-e^{-x+1})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - e^{-x+1}}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - e^{-x+1}}{-e^{-x+1}} = 1 \cdot \left(\frac{1-1}{1} \right) = 0$$

$$f(1) = 1 + \alpha$$

$$\text{Οπότε πρέπει } 1 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\gamma) \text{ Για } \alpha = 1 \text{ είναι } f(x) = \begin{cases} x-1 & , x \leq 1 \\ 1 - e^{-x+1} \ln(x-1) & , x \in (1, 2] \end{cases}$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[1, 2]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(2) &= (1 - e^{-1}) \cdot \ln 1 = 0 \end{aligned} \right\} f(1) = f(2)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = 0$, δηλαδή υπάρχει σημείο $A(\xi, f(\xi))$ της C_f , στο οποίο η

εφαπτομένη είναι παράλληλα στον άξονα $x'x$