

Δ1. Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \frac{0}{0}}} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Για $x \neq 0$, η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2}$

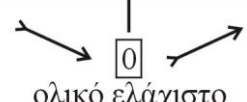
Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = e^x x - e^x + 1$

Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με

$$g'(x) = e^x + xe^x - e^x = g'(x) = xe^x$$

$$\text{Είναι } g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της g' η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

Από τον πίνακα αυτό φαίνεται ότι $g(x) \geq 0$ με την ισότητα μάλιστα να ισχύει μόνο για $x = 0$

Επομένως είναι $f'(x) = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ2. α) Είναι $F'(x) = f(x)$ κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επιπλέον $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού :

$$f(0) = 1 > 0$$

$$\text{Για } x > 0, e^x > 1 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0$$

$$\text{Για } x < 0, x < 0 \text{ και } e^x - 1 < 0 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} < 0$$

Άρα $F'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (και 1-1)

$$\text{Οπότε : } F(2f'(x)) = 0 \Rightarrow F(2f'(x)) = F(1) \stackrel{F(1)=1}{\Rightarrow} 2f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(0)$$

διότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} = f'(0) \end{aligned}$$

Η f είναι κυρτή, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και 1-1

$$\text{Επομένως } f'(x) = f'(0) \Rightarrow x = 0$$

β) Το Μ έχει συντεταγμένες $M(x(t), y(t))$

$$\text{Όμως } y(t) = f(x(t)) \Rightarrow y'(t) = x'(t) \cdot f'(x(t))$$

$$\begin{aligned} \text{Θέλουμε } x'(t_0) &= 2y'(t_0) \Rightarrow \frac{x'(t_0)}{2} = y'(t_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x'(t_0)}{2} = x'(t_0) \cdot f'(x(t_0)) \stackrel{x'(t_0) > 0}{\Rightarrow} f'(x(t_0)) = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x(t_0)) = f'(0) \stackrel{f':1-1}{\Rightarrow} x(t_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Και } y(t_0) = f(x(t_0)) = f(0) = 1$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0,1)$

Δ3. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2) = \left(\frac{x(e^x - 1)}{x} + 1 - e \right)^2 (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 (x - 2)^2$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(e^x - e) \cdot e^x (x - 2)^2 + 2(e^x - e)^2 (x - 2) = \\ &= 2(e^x - e)(x - 2)(e^x(x - 2) + e^x - e) = 2(e^x - e)(x - 2)(xe^x - e^x - e) \end{aligned}$$

$$\text{Προφανώς } g'(1) = 0 = g'(2)$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $h(x) = xe^x - e^x - e$, $x > 0$

Η συνάρτηση h είναι

η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} h(1) &= 1e^1 - e^1 - e = -e < 0 \\ h(2) &= 2e^2 - e^2 - e = e^2 - e > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(1) \cdot h(2) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow \xi e^\xi - e^\xi - e = 0$$

Ακόμη

$h'(x) = xe^x > 0$ για $x > 0$, άρα η ξ μοναδική της ρίζα και η h είναι γνησίως αύξουσα

$$\text{Για } 0 < x < \overset{h'}{\xi} \Rightarrow h(x) < h(\xi) = 0$$

$$\text{Για } x > \overset{h'}{\xi} \Rightarrow h(x) > h(\xi) = 0$$

Έτσι τα πρόσημα της g' η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Οπότε

Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα $x=1$, $x=2$ και τοπικό μέγιστο στο $x=\xi$

x	$-\infty$	1	2	ξ	$+\infty$
$e^x - e$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	0	+	+
$xe^x - e^x - e$	-	-	-	0	+
$g'(x)$	-	+	-	+	+
$g(x)$		τε	τε	τμ	τε

