Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.120 (2014 – Γ – διασκευασμένο)

Γ1. Η h είναι παραγωγίσιμη στο R, με :

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

$$h''(x)=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0 \text{ για κάθε } x\in R$$

Οπότε η h είναι κοίλη στο R

Γ2. Έχουμε διαδοχικά :

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Rightarrow \ln e^{h(2h'(x))}<\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left(2h'(x)\right)<\ln e-\ln(e+1)\Rightarrow h\left(2h'(x)\right)<1-\ln(e+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left(2h'(x)\right)<h(1)$$

Είναι $h'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}>0$ για κάθε $x\in R$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε $h\left(2h'(x)\right)<h(1)\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}2h'(x)<1\Rightarrow h'(x)<\dfrac{1}{2}\overset{h(0)=\frac{1}{2}}{\Rightarrow}h'(x)<h(0)\underset{h':\searrow}{\overset{h:\text{κοίλη}}{\Rightarrow}}x>0$

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1}{\overset{y=\frac{e^x}{e^x+1}}{=}}\lim_{y\to1}\ln y=0$$

Άρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)=1-0=1=\lambda$$, γιατί :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]\underset{\substack{x\to-\infty\\ y\to1}}{\overset{e^x+1=y}{=}}\lim_{y\to1}\ln y=0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)=0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

Γ4. Λύνουμε την $\varphi(x)=0\Rightarrow h(x)=-\ln2\Rightarrow h(x)=h(0)\underset{h\nearrow}{\overset{h'(x)>0}{\Rightarrow}}x=0$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E(\Omega)=\int_0^1\left|\varphi(x)\right|dx$

Όμως $h\nearrow R\Rightarrow x>0\Rightarrow h(x)>h(0)=-\ln2\Rightarrow h(x)+\ln2>0\Rightarrow\varphi(x)>0$

Άρα $\int_0^1\left|\varphi(x)\right|dx=\int_0^1\varphi(x)dx\Rightarrow$

$$\Rightarrow E(\Omega)=\int_0^1xe^xdx-\int_0^1e^x\ln\left(e^x+1\right)dx+\int_0^1\ln2\cdot e^xdx=$$

$$=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1e^xdx-\int_0^1e^x\ln\left(e^x+1\right)dx+\ln2\left[e^x\right]_0^1=$$

$$=e-e=1-\int_0^1e^x\ln\left(e^x+1\right)dx+\ln2(e-1)=$$

$$\underset{\substack{e^x dx=du \\ \Gamma\iota\alpha\; x=0 \\ u=2 \\ x=1 \\ u=1+e}}{\overset{1+e^x=u}{=}} 1+\ln 2(e-1)-\int_2^{1+e}\ln u\,du=$$

$$=1+\ln 2(e-1)-[u\ln u]_2^{1+e}+\int_2^{1+e}1\cdot du=$$

$$=1+\ln 2(e-1)-(1+e)\ln(1+e)+2\ln 2+1+e-2=$$

$$=1+\ln 2(e+1)-(e+1)\ln(1+e)-1+e=$$

$$=e+(e+1)\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$$