

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.12

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ως ρητή. Παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat θα είναι $f'(2) = 0$

$$\text{Είναι } f'(x) = -\frac{2\alpha}{x^3} - \frac{\beta}{(x-4)^2}$$

$$\text{Ισχύει: } \begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{4} = 0 \\ \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -\frac{3\beta}{4} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

- β) Για $\alpha = 1$, $\beta = -1$ είναι $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}$ και $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{(x-4)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2(x-4)^2 + x^3}{(x-4)^2 x^3} = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 + 16x - 32}{(x-4)^2 x^3} = 0 \Rightarrow$$

$$(\text{Σχήμα Horner: } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 16 & -32 \\ & & 2 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & 0 & 16 & 0 \end{array})$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x^2+16)}{(x-4)^2 x^3} = 0 \Rightarrow x = 2$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+	+
$f(x)$					

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$,

γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2]$,

γνησίως αύξουσα στο $[2, 4)$,

γνησίως αύξουσα στο $(4, +\infty)$.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$, το $f(2) = \frac{3}{4}$

- γ) Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right) \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(A_1) = (0, +\infty)$$

Στο διάστημα $A_2 = (0, 2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f(A_2) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right) = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right)$$

Στο διάστημα $A_3 = [2, 4)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα :

$$f(A_3) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \right) \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(A_3) = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right)$$

Στο διάστημα $A_4 = (4, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα :

$$f(A_4) = \left(\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = -\infty$$

$$\text{Άρα } f(A_4) = (-\infty, 0)$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

δ) Θα μας βοηθήσει ο διπλανός πίνακας

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$	0

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

i) Αν $\kappa \in (-\infty, 0)$

Τότε $\kappa \in f(A_4)$

Η f είναι γνησίως μονότονη στο A_4 και άρα, η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $A_4 = (4, +\infty)$

ii) Αν $\kappa = 0$, $\kappa \notin f(A)$ και άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

iii) Αν $\kappa \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$

Τότε $\kappa \in f(A_1)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, 0)$ και άρα η εξίσωση

$f(x) = \kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $A_1 = (-\infty, 0)$

iv) Αν $\kappa = \frac{3}{4}$

Τότε η $f(x) = \frac{3}{4}$ έχει μία ρίζα στο $A_1 = (-\infty, 0)$, και την $x = 2$ δηλαδή η f έχει ακριβώς δύο ρίζες

v) Αν $\kappa \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

Τότε $\kappa \in f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3)$

η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες μία στο $A_1 = (-\infty, 0)$ μία στο $A_2 = (0, 2]$ και μία στο $A_3 = [2, 4)$