

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.119 (2013 – Γ – διασκευασμένο)

Γ1. Έχουμε : $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Rightarrow (f(x) + x)(f(x) + x)' = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\frac{(f(x) + x)^2}{2} \right]' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' \Rightarrow \frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\text{Για } x = 0, f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1+0}{2} = \frac{0}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2 + 1}{2} \Rightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + 1 > 0$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) + x \neq 0$$

Επομένως η συνάρτηση $f(x) + x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται ,

άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο . Για $x = 0$ είναι $f(0) + 0 = 1 > 0$,

δηλαδή $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Συνεπώς : } (f(x) + x)^2 = x^2 + 1 \xRightarrow{f(x)+x>0} f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Για } x \leq 0, \text{ προφανώς } f'(x) < 0$$

$$\text{Για } x > 0, x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$$

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και 1-1

$$\text{Έχουμε : } f(g(x)) = 1 \Rightarrow f(g(x)) = f(0) \xRightarrow{f:1-1} g(x) = 0$$

Άρα αρκεί να βρούμε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $g(x) = 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $g'(x) = 3x^2 + 3x$

$$\text{Είναι } g'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ με } g(-1) = -\frac{1}{2} \text{ και } g(0) = -1$$

Τα πρόσημα της g' η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$ $-\frac{1}{2}$ $\tau\mu$ $\searrow$ -1 $\tau\varepsilon$ $\nearrow$				

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$

$$\text{άρα } g(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right] = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 \right), -\frac{1}{2} \right] = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right]$$

$0 \notin g(A_1)$ άρα η g δεν έχει ρίζα στο A_1

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [-1, 0]$, άρα :

$$g(A_2) = [g(0), g(-1)] = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$$

$0 \notin g(A_2)$ άρα η g δεν έχει ρίζα στο A_2

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_3 = [0, +\infty)$, άρα :

$$g(A_3) = \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right] = \left[-1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1\right)\right] = [-1, +\infty)$$

$0 \in g(A_3)$ και η $g \nearrow A_3$, άρα η g έχει μία ακριβώς ρίζα στο A_3

Συνεπώς η $f(g(x)) = 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα (και μάλιστα θετική)

Γ3. Η F είναι παράγουσα της f , άρα $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) > 0$, αφού :

$$\text{Για } x \geq 0: x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \stackrel{x \geq 0}{\Rightarrow} \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$$

$$\text{Για } x < 0: -x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

Άρα $F'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ η F γνησίως αύξουσα

$$\text{Έστω } h(x) = F\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon^{\varphi x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= F\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \varepsilon^{\varphi 0} = F\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0 \\ \text{αφού } -\frac{\pi}{4} < 0 &\Rightarrow F\left(-\frac{\pi}{4}\right) < F(0) = 0 \\ h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= F(0) + f(0) \cdot 1 = f(0) = 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε :

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow F\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon^{\varphi x_0} = 0$$