

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.117 (2011 – Γ)

Γ1. Έχουμε : $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) + xf''(x) = (e^x f'(x))' - e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (xf'(x))' = (e^x f'(x) - e^x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xf'(x) = e^x f'(x) - e^x + c$$

Για $x=0$, $f'(0)=0 \Rightarrow c=1$

Άρα $xf'(x) = e^x f'(x) - e^x + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1$$

$$\begin{matrix} e^x \geq x+1 > x \Rightarrow e^x - x > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (\ln(e^x - x))'$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c$$

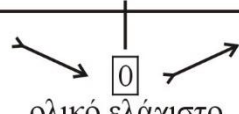
Για $x=0$, $f(0)=0 \Rightarrow \ln 1 + c = 0 \Rightarrow c=0$

Άρα $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 0 \Rightarrow e^x = 1 = e^0 \Rightarrow x=0$ με $f(0)=0$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$

Γ3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} \end{aligned}$$

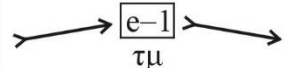
Έστω $g(x) = 2e^x - xe^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$g'(x) = 2e^x - e^x = xe^x = e^x(1 - x)$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow x=1$$

Τα πρόσημα της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, 1]$ άρα

$$g(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(1) \right] = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1), e-1 \right)$$

$$\text{Όπου } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} - 1 \stackrel{\text{DLH}}{=} 0 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} - 1 = -1$$

$$\text{Άρα } g(A_1) = (-1, e-1]$$

$0 \in g(A_1)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$

$$\text{Άρα } g(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1) \right]$$

$$\text{Όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2-x)e^x] - 1 = (-\infty)(+\infty) - 1 = -\infty$$

$$\text{Άρα } g(A_2) = (-\infty, e-1]$$

$0 \in g(A_2)$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2

άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_2 \in A_2$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = 0$

$$\text{Για } x < 1 \text{ και } x < x_1 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x_1) \Rightarrow g(x) < 0$$

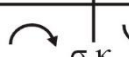
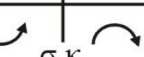
$$x > x_1 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_1) \Rightarrow g(x) > 0$$

$$\text{Για } x > 1 \text{ και } x < x_2 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_2) \Rightarrow g(x) > 0$$

$$x > x_2 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x_2) \Rightarrow g(x) < 0$$

$$\text{Τα πρόσημα της } f''(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2} \text{ η}$$

κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$	
$g''(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$					

Επομένως η f έχει δύο ακριβώς σημεία καμπής

$$\text{Γ4. Έστω } h(x) = \ln(e^x - x) - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= -1 < 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0 \text{ αφού } \frac{\pi}{2} > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\overset{f' \nearrow \text{για } x > 0}{\Rightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0 \\ &h(0) \cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \end{aligned}$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε :

$$h(x_0) = 0$$

Ακόμη είναι $h'(x) = f'(x) + \eta \mu x > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ αφού $f'(x) > 0$ για

$$x > 0 \text{ και } \eta \mu x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα και $1-1$ οπότε το x_0 είναι μοναδικό