

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.116 (2010 – Γ)

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}$$

Το τριώνυμο x^2+x+1 έχει $\Delta = -3 < 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Γ2. Η εξίσωση γράφεται :

$$\begin{aligned} 2(x^2-3x)+2 &= \ln \left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1} \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2-2(3x+2) &= \ln[(3x-2)^2+1] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1) &= 2(3x+2)+\ln[(3x-2)^2+1] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x^2) &= f(3x-2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 3x-2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2-3x+2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x &= 2 \end{aligned}$$

Γ3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(2 + \frac{2x}{x^2+1} \right)' = \frac{2(x^2+1)-2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \\ f''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \end{aligned}$$

Τα πρόσημα της f'' και η κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
f(x)					
	σ.κ.		σ.κ.		

Οπότε η f παρουσιάζει δύο σημεία καμπής το $A(-1, \ln 2 - 2)$ και το $B(1, 2 + \ln 2)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι :

$$\varepsilon_1 : y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y - \ln 2 + 2 = x + 1 \Rightarrow y = x + \ln 2 - 1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο B είναι :

$$\varepsilon_2 : y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - \ln 2 - 2 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x + \ln 2 - 1$$

Το σημείο τομής των δύο ευθειών θα βρεθεί από λύση της εξίσωσης :
 $x + \ln 2 - 1 = 3x + \ln 2 - 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Άρα οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της, τέμνονται σε σημείο που έχει τετμημένη $x = 0$ άρα βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$

Γ4. $I = \int_{-1}^1 xf(x)dx =$
 $= \int_{-1}^1 x(2x + \ln(x^2+1))dx =$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx = \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right)' \ln(x^2 + 1) dx = \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \left[(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1) \cdot 2x}{x^2 + 1} dx = \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \ln 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2x dx = \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$