

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.115 (2007 – 4ο διασκευασμένο)

α) Η G είναι συνεχής στο $(0, 2]$, αφού η H είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε :

$$\begin{aligned} G(0) &= 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-t^2})(1 + \sqrt{1-t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = \\ &= 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1^2 - \sqrt{1-t^2}^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{1-t^2} + 1)} = \frac{6 \cdot 1}{\sqrt{1} + 1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{H(x)}{x} - F(x) + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{H(x) - 0}{x - 0} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x) + 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{H(x) - H(0)}{x - 0} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x) + 3 \stackrel{F: \text{συνεχής}}{=} H'(0) - F(0) + 3 = \\ &\stackrel{H: \text{παραγούσα της } xf(x)}{=} 0 \cdot f(0) - 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0)$ και άρα η G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$

β) Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων αφού η H είναι παραγωγίσιμη

με $H'(x) = xf(x)$ και η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$

Ακόμη

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{H(x)}{x} - F(x) + 3 \right)' = \frac{H'(x) \cdot x - H(x)}{x^2} - F'(x) = \\ &= \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x) - x^2 f(x)}{x^2} = \\ &= -\frac{H(x)}{x^2}, \quad x \in (0, 2) \end{aligned}$$

γ) Από εκφώνηση έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_0^2 (t-2)f(t)dt &= 0 \Rightarrow \int_0^2 [tf(t) - 2f(t)]dt = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^2 tf(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 H'(t)dt - 2 \int_0^2 F'(t)dt = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [H(t)]_0^2 = 2[F(t)]_0^2 \stackrel{H(0)=F(0)=0}{\Rightarrow} H(2) = 2F(2) \Rightarrow \frac{H(2)}{2} = F(2) \quad (1) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση G

είναι συνεχής στο $[0, 2]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$

$$\left. \begin{aligned} G(0) &= 3 \\ G(2) &= \frac{H(2)}{2} - F(2) + 3 \stackrel{(1)}{=} 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow G(0) = G(2)$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } G'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{-H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow H(\alpha) = 0$$

δ) Η συνάρτηση G :

είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } G'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - F(\alpha) + 3 - 3}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\stackrel{H(\alpha)=0}{\Rightarrow} \alpha H(\xi) = \xi^2 F(\alpha)$$