

- A)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με :

$$f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - \frac{1}{x+1}, \quad x > -1$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f(0) = \alpha^0 - \ln(0+1) = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \text{ για κάθε } x > -1$$

Επομένως η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το

Θεώρημα Fermat θα ισχύει :

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \alpha^0 \ln \alpha - \frac{1}{0+1} = 0 \Rightarrow \ln \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = e$$

- B) α)** Η f γράφεται για $\alpha = e$: $f(x) = e^x - \ln(x+1)$

Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \text{ και } f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x > -1, \text{ άρα η } f$$

είναι κυρτή.

β) Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - \frac{1}{x+1} = 0$

$$\text{Προφανώς } f'(0) = 0$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε

$$\text{για } -1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (-1, 0]$$

$$\text{για } x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [1, +\infty)$$

γ) Είναι $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$

$$\text{Οπότε θέτουμε } g(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1), \quad x \in [1, 2]$$

Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} g(1) &= 1 - f(\beta) < 0 \\ g(2) &= f(\gamma) - 1 > 0 \\ (\text{διότι } f(x) &\geq 1 \text{ με την ισότητα να} \\ &\text{ισχύει μόνο για } x = 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(1) \cdot g(2) < 0$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ άρα και η

$$\text{εξίσωση } \frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } (1, 2)$$