

α) Θέτουμε $\int_0^2 f(x) dx = \alpha$ και έχουμε $f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot \alpha - 45$ (1)

Μένει λοιπόν να βρούμε τον αριθμό α
Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= (10x^3 + 3x) \cdot \alpha - 45 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [(10x^3 + 3x) \cdot \alpha - 45] dx \stackrel{\int_0^2 f(x) dx = \alpha}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \alpha = \int_0^2 [(10x^3 + 3x) \cdot \alpha] dx - \int_0^2 45 dx \Rightarrow \alpha = \alpha \int_0^2 (10x^3 + 3x) dx - 45(2 - 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha = \alpha \left[\frac{10x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^2 - 90 \Rightarrow \alpha = \alpha \left(\frac{10 \cdot 2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 0 \right) - 90 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha = \alpha(40 + 6) - 90 \Rightarrow \alpha = 46\alpha - 90 \Rightarrow -45\alpha = -90 \Rightarrow \alpha = 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Έτσι

(1), (2) $\Rightarrow f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot 2 - 45 \Rightarrow f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

β) Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} = g''(x)$$

Θέτω $y = -h$

Όταν $h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$ και η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(x-y) - g(x)}{-y} &= g''(x) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-g(x-y) + g(x)}{y} = g''(x) \\ \Rightarrow g''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x-h)}{h} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

γ) i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\stackrel{g: \text{συνεχής}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = 0} \\ &\stackrel{\frac{0}{0} \text{ DLH}}{\Rightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)]'}{(h^2)'} = f(x) + 45 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = f(x) + 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{2h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{2h} \right] = f(x) + 45 \Rightarrow$$

$$\stackrel{\beta)}{\Rightarrow} \frac{g''(x)}{2} + \frac{g''(x)}{2} = f(x) + 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x - 45 + 45 \Rightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [g'(x)]' = [5x^4 + 3x^2]' \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1$$

$$\bullet \quad g'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = (x^5 + x^3 + x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$$

$$\bullet g(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$\text{Άρα } g(x) = x^5 + x^3 + x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii) Η g είναι παραγωγίσιμη ως πολωνυμική με :

$$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1