

α) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων με } f'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

(στο $x_0 = 0$ αφού η f είναι συνεχής δεν ενδιαφέρει να μελετήσουμε την παραγωγισιμότητα της)

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			↘ ↗	

Οπότε η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $[0, e^{-1}]$

και γνησίως αύξουσα στο $[e^{-1}, +\infty)$

Ακόμη

$$f(0) = 0, \quad f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = -e^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα, οι τιμές και τα όρια της f , στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$		0	$-e^{-1}$	$+\infty$

Οπότε

$$\text{στο διάστημα } A_1 = [0, e^{-1}] \text{ είναι } f \searrow \Rightarrow f(A_1) = [f(e^{-1}), f(0)] = [-e^{-1}, 0]$$

στο διάστημα $A_2 = [e^{-1}, +\infty)$ είναι

$$f \nearrow \Rightarrow f(A_2) = [f(e^{-1}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-e^{-1}, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-e^{-1}, +\infty) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

γ) Για $x > 0$ έχουμε ισοδύναμα

$$x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

οπότε η εξίσωση $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = \alpha$ η οποία με βάση το πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων του ερωτήματος β)

- αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, είναι αδύνατη
- αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, έχει ακριβώς μία ρίζα την $x_0 = \frac{1}{e}$ (προφανώς θετική)
- αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ και ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ οπότε τελικά έχει ακριβώς δύο ρίζες (προφανώς θετικές και οι δύο)
- αν $\alpha = 0$, έχει ρίζα το 0 (η οποία όμως δεν είναι θετική και έτσι απορρίπτεται) και έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ (προφανώς θετική)
- αν $\alpha > -\frac{1}{e}$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ (προφανώς θετική)

δ) Για $x > 0$ ξέρουμε ότι η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+1)$, ως πολυωνυμική με $f'(x) = \ln x + 1$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Rightarrow \ln \xi = f(x+1) - f(x) \quad (1)$$

Επομένως έχουμε ισοδύναμα

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \ln(x+1) + 1 > \ln \xi + 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln \xi \Leftrightarrow x+1 > \xi$$

που ισχύει διότι $\xi \in (x, x+1)$