

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.111 (2007 – 4ο – διασκευασμένο)

α) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$$

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, και ως αρχική της $f \cdot g$ είναι

$$F'(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow F'(x) > 0, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ που σημαίνει (αφού η } F \text{ είναι} \\ \text{συνεχής στο } [0,1]) \text{ ότι η } F \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

β) Για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$ έχουμε ότι

η συνάρτηση F
είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$,
είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \Rightarrow f(\xi)g(\xi) = \frac{F(x)}{x} \Rightarrow F(x) = x \cdot f(\xi) \cdot g(\xi) \quad (1)$$

Έτσι για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$ έχουμε ισοδύναμα

$$f(x) \cdot G(x) > F(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot G(x) > x \cdot f(\xi) \cdot g(\xi) \quad \text{που ισχύει}$$

διότι

$$\xi \in (0, x) \Rightarrow x > \xi \Rightarrow f(x) > f(\xi) \quad (2)$$

και ακόμη

$$\text{θέτουμε } h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = G(x) - x \cdot g(\xi)$$

η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων με } h'(x) = G'(x) - g(\xi) \Rightarrow G(x) - G(0) - g(\xi)(x - 0) > 0, \\ \text{για κάθε } x \in [0,1]$$

οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα για κάθε $x > 0$ είναι

$$h(x) > h(0) \Rightarrow G(x) - x \cdot g(\xi) > G(0) - 0 \cdot g(\xi) \Rightarrow G(x) - x \cdot g(\xi) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow G(x) > x \cdot g(\xi) \quad (3)$$

Οι ανισότητες (2) και (3) έχουν όλα τα μέλη τους θετικά και άρα μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη και να έχουμε

$$f(x) \cdot G(x) > x \cdot f(\xi) \cdot g(\xi)$$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1]$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} \stackrel{F'(x)=f(x)g(x)}{=} \frac{f(x)g(x)G(x) - F(x)g(x)}{G^2(x)} = \\
 &= \frac{g(x)[f(x)G(x) - F(x)]}{G^2(x)}, \text{ για κάθε } x \in (0,1]
 \end{aligned}$$

Επειδή $g(x) > 0$ και από το ερώτημα γ) είναι $f(x) \cdot G(x) > F(x)$, για κάθε $x \in (0,1]$ έχουμε ότι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1]$ που σημαίνει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

Έτσι για κάθε $x \in (0,1]$ έχουμε

$$x \leq 1 \Rightarrow h(x) \leq h(1) \Rightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$