

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.110 (2007 – 3ο)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ ή $x = 1$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		τμ	↘	
			τε		

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$

Ακόμη η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) = 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Είναι $f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↪		σ.κ.

Οπότε η f είναι παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0, f(0))$

- β) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	↗	2συν ² θ	↘	-2(1+ημ ² θ)	↗	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ είναι

$$f \nearrow \Rightarrow f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right) = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 1]$ είναι

$$f \searrow \Rightarrow f(A_2) = [f(1), f(-1)] = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$$

στο διάστημα $A_3 = [1, +\infty)$ είναι

$$f \nearrow \Rightarrow f(A_3) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty)$$

Είναι $-2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$ και $2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ (διότι $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$). Έτσι το 0 περιέχεται

στα διαστήματα $f(A_1)$, $f(A_2)$ και $f(A_3)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1 , A_2 και A_3 συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο \mathbb{R}

γ) Τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ έχουν συντεταγμένες

$$A(-1, f(-1)) = A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$$

$$B(1, f(1)) = B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta))$$

$$\Gamma(0, f(0)) = \Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$$

Οπότε

το A ανήκει στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ διότι

$$2\sigma\upsilon\nu^2\theta = -2(-1) - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta)$$

που ισχύει

το B ανήκει στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ διότι

$$-2(1 + \eta\mu^2\theta) = -2 \cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta \quad \text{που ισχύει}$$

το B ανήκει στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ διότι

$$-2\eta\mu^2\theta = -2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta \quad \text{που ισχύει}$$

δ) Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας

(πιο σωστά τις τετμημένες των κοινών σημείων)

Έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta = -2x - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-1}^1 |f(x) - y| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta - (-2x - 2\eta\mu^2\theta)| dx =$$

$$= \int_{-1}^1 |x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx$$

τα πρόσημα του $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^3 - x$	-	ϕ	+	ϕ	+

Επομένως

$$E = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{4} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$