

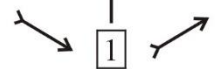
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.11

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x=1 \text{ με } f(1)=1$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$				

άρα η f

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

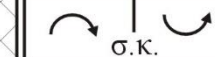
παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο το $f(1)=1$

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2-x}{x^3} = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} x=2, \text{ με } f(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{2-x}{x^3} > 0 \Rightarrow x \in (0, 2)$$

Τα πρόσημα της f'' η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$			- 0 +	
$f(x)$				

Δηλαδή η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,2]$ κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\left(2, f(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}\right)$ δηλαδή στο $\left(2, \ln 2 + \frac{1}{2}\right)$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\substack{+\infty \\ +\infty \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

δ) Στο διάστημα $A_1 = (0,1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα :

$$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x \ln x + 1}{x} \right) \stackrel{\gamma)}{=} 1 \cdot (+\infty) = +\infty \Rightarrow f(A_1) = [1, +\infty)$$

$2 \in f(A_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 άρα, η εξίσωση

$f(x) = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο A_1

Στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \text{ όπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Άρα $f(A_2) = [1, +\infty)$

$2 \in f(A_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 άρα, η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο A_2

Επομένως, αφού $f(1) \neq 2$ η f έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $A_1 \cup A_2 = (0, +\infty)$