

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.109 (2006 – 4ο)

- α) Για το πεδίο ορισμού της f θα πρέπει $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ και $x > 0$
Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0,1) \cup (1, +\infty)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε

η f είναι παραγωγίσιμη στο A ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} < 0, \text{ για κάθε } x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα υπολογίσουμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \frac{0+1}{0-1} - (-\infty) = -1 + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 2 \cdot (-\infty) - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 2 \cdot (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} - (+\infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+0}{1-0} - (+\infty) = 1 - (+\infty) = -\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	
$f(x)$		$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (0,1)$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = (-\infty, +\infty)$

στο διάστημα $A_2 = (1, +\infty)$ είναι

$$f \searrow \Rightarrow f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right] = (-\infty, +\infty)$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

- β) Παρατηρούμε ότι το 0 περιέχεται στα διαστήματα $f(A_1)$ και $f(A_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1 και A_2 συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

- γ) Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο A έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \ln \alpha \\ g'(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \\ y - g(\alpha) &= g'(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Rightarrow y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}x - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha \end{aligned}$$

Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο B έχει εξίσωση

$$y - h(\beta) = h'(\beta)(x - \beta) \quad \begin{matrix} h(\beta) = e^\beta \\ h'(x) = e^x \Rightarrow h'(\beta) = e^\beta \end{matrix} \Rightarrow y - e^\beta = e^\beta (x - \beta) \Rightarrow y - e^\beta = e^\beta x - \beta e^\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow y = e^\beta x - \beta e^\beta + e^\beta$$

Τώρα για να ταυτίζονται οι ευθείες

$$y = \frac{1}{\alpha} x - 1 + \ln \alpha \quad \text{και} \quad y = e^\beta x - \beta e^\beta + e^\beta$$

θα πρέπει

$$\frac{1}{\alpha} = e^\beta \quad \text{και} \quad -1 + \ln \alpha = -\beta e^\beta + e^\beta$$

Οπότε

$$\begin{aligned} e^\beta = \frac{1}{\alpha} \quad \beta = \ln \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \beta = -\ln \alpha \\ -1 + \ln \alpha = -\beta e^\beta + e^\beta \Rightarrow -1 + \ln \alpha = \frac{1}{\alpha} \ln \alpha + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow -\alpha + \alpha \ln \alpha = \ln \alpha + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha \ln \alpha - \ln \alpha = 1 + \alpha \Rightarrow (\alpha - 1) \ln \alpha = 1 + \alpha \Rightarrow \ln \alpha = \frac{1 + \alpha}{\alpha - 1} \Rightarrow \ln \alpha - \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

- δ)** Από το γ) ερώτημα είδαμε ότι αν η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $(\alpha, g(\alpha))$ θα ταυτίζεται με μια εφαπτόμενη της h τότε το α είναι ρίζα της f το οποίο προφανώς ισχύει και αντίστροφα. Όμως από το β) ερώτημα η f έχει ακριβώς δύο ρίζες οπότε υπάρχουν και ακριβώς δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης τη g οι οποίες εφάπτονται και στην γραφική παράσταση της h